МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРКАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ПРАКТИКУМ
з інтегрального числення

Частина II
"Визначений інтеграл"

Затверджено на засіданні
кафедри прикладної математики,
протокол № 3 від 6.10.04 р.,
та Методичною радою ЧДТУ,
протокол № 9 від 22.06.05 р.

Черкаси ЧДТУ 2005

УДК 517.31(076)
ББК 22.161.1
П69

Укладачі: **Дідковський** Руслан Михайлович, к.т.н.,
Сисоєнко Валентина Василівна,
Щерба Валентина Олександрівна

Рецензент Щерба Анатолій Іванович, к.ф.-м.н., доцент

П Практикум з інтегрального числення: Частина ІІ. Визначений інтеграл / Укл.: Р.М. Дідковський, В.В. Сисоєнко, В.О. Щерба. – Черкаси: ЧДТУ, 2005. – 66 с.
ISBN 966-7533-76-X
966-7533-99-9

У практикумі, який складається з дев'яти параграфів, наведено формулювання основних понять, теорем та рекомендації щодо їх використання при розв'язуванні задач; зразки розв'язування задач та прикладів; контрольні запитання та завдання для закріплення знань із вивченого матеріалу, які можуть бути використані на аудиторних заняттях; завдання для виконання розрахунково-графічних робіт.

Для студентів технічних та економічних спеціальностей всіх форм навчання.

УДК 517.31(076)
ББК 22.161.1

ISBN 966-7533-76-X
966-7533-99-9

ПЕРЕДМОВА

Визначений інтеграл та ідеї інтегрального числення виявилися надзвичайно плідними в їх застосуванні для розв'язування цілого ряду задач природознавства.

Першими прикладами використання методів інтегрального числення вважаються дослідження давньогрецьких вчених Евдока Кнідського (IV ст. до н.е.) та Архімеда з Сіракуз (III ст. до н.е.) по визначенню площ, об'ємів і центрів мас. Визначений інтеграл існував більше 2000 років без застосування через складність обчислення інтегральних сум. Своє широке застосування він отримав лише в кінці XVIII ст., коли Ньютон та Лейбніц відкрили його тісний взаємозв'язок з невизначеним інтегралом. Перше означення інтеграла як границі інтегральних сум, яке й дотепер є загально прийнятим, дав у 1821 р. Коші О.Л. Подальший розвиток поняття інтеграла (кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та ін.) від функції загальної будови пов'язують з іменемами Рімана, Лебега та Рісса.

Практикум з інтегрального числення, частина II „Визначений інтеграл" становить разом з частиною I „Невизначений інтеграл" єдиний комплекс і є її логічним та методичним продовженням.

Практикум умовно поділено на дев'ять параграфів, до яких увійшли наступні теми:

- Означення визначеного інтеграла, його основні властивості, класи інтегровних функцій, формула Ньютона-Лейбніца.
- Заміна змінної під знаком визначеного інтеграла.
- Інтегрування частинами визначених інтегралів.
- Невласні інтеграли з нескінченними межами, їх властивості, ознаки збіжності.
- Невласні інтеграли від необмежених функцій, їх властивості, ознаки збіжності.
- Площа плоскої фігури, методи її обчислення в залежності від вибору системи координат.
- Спрямлювана дуга та довжина гладкої дуги в залежності від способу її задання.
- Об'єм тіла за відомими площами його поперечних перерізів. Об'єм і площа поверхні тіла обертання.
- Обчислення моментів, координат центра мас, теореми Гульдіна.

У кожному параграфі наведено формулювання основних понять, теорем та рекомендації щодо їх використання при розв'язуванні задач; зразки розв'язування задач та прикладів; контрольні запитання та завдання для закріплення знань із вивченого матеріалу, які можуть бути використані на аудиторних заняттях; завдання для виконання розрахунково-графічних робіт; детальні посилання на навчальну літературу.

Практикум рекомендовано для студентів технічних та економічних спеціальностей всіх форм навчання.

§1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ЯК ГРАНИЦЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ СУМ. ОЦІНКА ТА ПОРІВНЯННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Основні поняття і теореми

[1, с. 365-380; 2, с. 222-241; 3, с. 356-374]

Розглянемо функцію $f(x)$, яка визначена в кожній точці $x \in [a; b]$. *Розбиттям* $\{x_k\}$ відрізка $[a; b]$ називається скінченна система точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$ цього відрізка така, що $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Відрізки $[x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ називаються *частинними відрізками розбиття*. Довжину k-го частинного відрізка позначимо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Число

$$d = \max_k \Delta x_k$$

називають *діаметром розбиття* $\{x_k\}$. На кожному з частинних відрізків оберемо довільну точку $t_k \in [x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Набір цих точок $\{t_k\}$ називають *вибіркою розбиття* $\{x_k\}$. *Інтегральною сумою* функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називається сума виду

$$S(f; x_k; t_k) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k .$$

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ називають границю інтегральних сум $S(f; x_k; t_k)$, коли діаметр d розбиття $\{x_k\}$ прямує до нуля і позначають символом

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Таким чином

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \cdot \Delta x_k .$$

Границя в цій формулі (фіксоване число) повинна існувати і не залежати від способу розбиття відрізка $[a; b]$ точками $\{x_k\}$ та від вибору точок $\{t_k\}$ на частинних відрізках $[x_{k-1}; x_k]$.

У випадку, коли інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує, функція $f(x)$ називається *інтегровною* на $[a; b]$.

Множина інтегровних функцій.

а) Необхідна умова інтегровності: інтегровна на $[a; b]$ функція $f(x)$ обмежена на цьому відрізку.

б) Кусово неперервна на $[a; b]$ функція $f(x)$ інтегровна на цьому відрізку.

в) Монотонна на відрізку функція інтегровна на цьому відрізку.

П р и к л а д обмеженої на відрізку $[a; b]$, але не інтегровної функції:

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } x \text{ раціональне;}\\ 0, \text{ якщо } x \text{ ірраціональне.}\end{cases}$$

Властивості визначеного інтеграла.

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt.$$

2. <u>*Лінійність*</u> інтеграла:
якщо $f(x)$ і $g(x)$ – інтегровні на $[a; b]$ функції, то їх лінійна комбінація $\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)$ також інтегровна на $[a; b]$ функція, причому

$$\int_a^b\left(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\right)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx.$$

Наслідок. $\int_a^b C\cdot dx=C\cdot(b-a)$, де C – стала величина.

3. <u>*Адитивність*</u> інтеграла:
якщо $a<b<c$ і функція $f(x)$ інтегровна на $[a; c]$, то $f(x)$ також інтегровна на відрізках $[a; b]$ та $[b; c]$, причому має місце рівність

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx.$$

Наслідок. $\int_a^a f(x)dx=0$.

Означення. $\int_a^b f(x)dx\equiv-\int_b^a f(x)dx$.

4. <u>*Монотонність*</u> інтеграла:
якщо $f(x)$, $g(x)$ інтегровні на $[a; b]$ і $f(x)\le g(x)$, $x\in[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

Наслідок 1. $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b\left|f(x)\right|dx$.

Наслідок 2. <u>*Оцінка інтеграла*</u>: якщо $f(x)$ інтегровна на $[a; b]$ і сталі m, M такі, що $m\le f(x)\le M$, $x\in[a; b]$, то

$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M\cdot(b-a).$$

5. Теорема про <u>середнє інтегральне</u> значення.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то існує точка $c \in [a;b]$ така, що

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Формула Ньютона-Лейбніца

Основна теорема інтегрального числення. Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною від неперервної функції $f(x)$, $x \in [a;\, b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Різницю $F(b) - F(a)$ значень функції $F(x)$ часто записують у вигляді символу $F(x)\Big|_a^b$. В цих позначеннях формула Ньютона-Лейбніца набуває вигляду

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.}$$

Ця формула встановлює взаємозв’язок між визначеним інтегралом та первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a;\, b]$.

Приклади розв’язування задач.

1.1. Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца.

1) $$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^1 = \left.\frac{2}{3}\cdot(1+x)^{\frac{3}{2}}\right|_0^1 = \frac{2}{3}\cdot\left((1+1)^{\frac{3}{2}} - (1+0)^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8}-1\right).$$

2) $$\int_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}} = \frac{1}{3}\int_{-1}^{7}\frac{d(3x+4)}{\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{3}\int_{-1}^{7}\frac{d(3x+4)}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{2}{3}\sqrt{3x+4}\,\Big|_{-1}^{7} = \frac{2}{3}\sqrt{25} - \frac{2}{3}\sqrt{1} =$$

$$= \frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

3) $$\int_0^4 (1+e^{\frac{x}{4}})dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = x\Big|_0^4 + 4\cdot e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4 = (4-0) + (4e - 4\cdot 1) = 4e.$$

1.2. Оцінити інтеграл $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{x^2+1}$.

Розв'язання.

Знайдемо найбільше та найменше значення підінтегральної функції $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ на відрізку [0; 2]. Область визначення цієї функції – вся множина дійсних чисел, тобто $x \in (-\infty;\infty)$.

$$f'(x)=\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2};$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -x^2+1=0,$$

або

$$x^2=1 \Rightarrow x_1=1;\, x_2=-1.$$

Отже функція $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ має дві критичні точки. Відрізку інтегрування [0;2] належить лише одна точка $x=1$. Знайдемо значення підінтегральної функції на кінцях відрізка інтегрування та в точці $x=1$:

$$f(0)=\frac{0}{0+1}=0;\ f(2)=\frac{2}{4+1}=\frac{2}{5};\ f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

Порівняємо значення функції в точках $x=0$, $x=1$, $x=2$. Маємо:

$f(0)=0$ – найменше значення;

$f(1)=\frac{1}{2}$ – найбільше значення;

$f(2)=\frac{2}{5}$.

Для функції $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ на відрізку [0;2] виконується нерівність

$$0 \le f(x) \le \frac{1}{2}.$$

Тоді за властивістю 4 (наслідок 2) маємо, що

$$0\cdot 2 \le \int\limits_0^2 \frac{x}{x^2+1}dx \le \frac{1}{2}\cdot 2,$$

де довжина відрізка інтегрування $|b-a|=|2-0|=2$, тобто

$$0 \le \int\limits_0^2 \frac{x}{x^2+1}dx \le 1.$$

1.3. Оцінити інтеграл $\int\limits_{1.5}^{2} \frac{xdx}{\ln x}$.

Розв'язання.

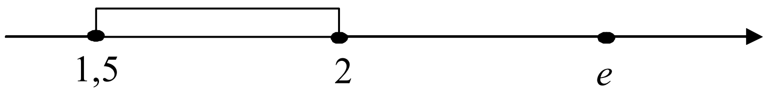
Знайдемо найбільше і найменше значення підінтегральної функції $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ на відрізку $[1{,}5;\,2]$.

Для цього відшукаємо критичні точки функції $f(x)$:

$$f'(x)=\frac{\ln x - x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}.$$

Тоді $f'(x)=0 \Rightarrow \ln x-1=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e.$

Точка $x=e$ – критична. Вона лежить зовні відрізка інтегрування:



Значення функції на кінцях відрізка інтегрування відповідно дорівнюють

$$f(1.5)=\frac{1.5}{\ln 1.5}=\frac{3}{2\ln\frac{3}{2}}\approx 3{,}699 \text{ – найбільше значення;}$$

$$f(2)=\frac{2}{\ln 2}\approx 2{,}885 \text{ – найменше значення.}$$

Тоді

$$\frac{2}{\ln 2}\cdot\frac{1}{2}\le \int\limits_{1.5}^{2}\frac{x}{\ln x}dx \le \frac{3}{2\ln\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}, \text{ де } |b-a|=|2-1.5|=\frac{1}{2}.$$

Або

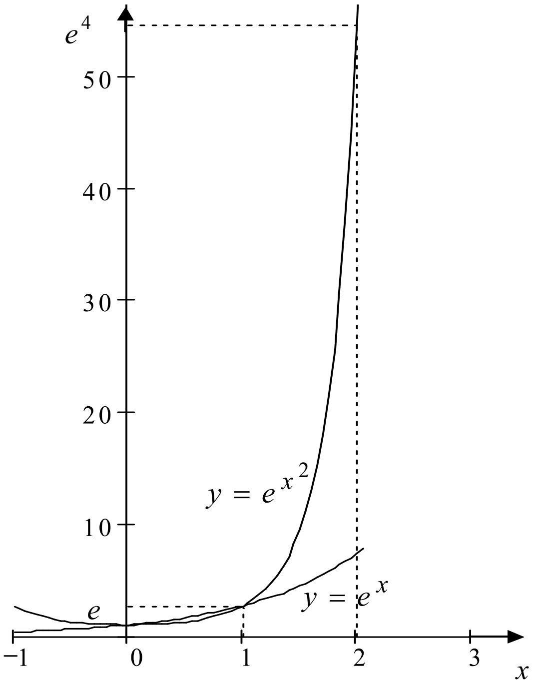
$$\frac{1}{\ln 2}\le \int\limits_{1.5}^{2}\frac{x}{\ln x}dx \le \frac{3}{4\ln\frac{3}{2}}.$$

1.4. Не виконуючи обчислень встановити, який із інтегралів більший:

а) $\int\limits_0^1 e^{x^2}dx$ чи $\int\limits_0^1 e^x dx$; б) $\int\limits_1^2 e^{x^2}dx$ чи $\int\limits_1^2 e^x dx$.

Розв'язання.

а) На проміжку $0\le x\le 1$ значення $e^{x^2}\le e^x$, тому



$$\int_0^1 e^{x^2}dx \le \int_0^1 e^x dx.$$

а) На проміжку $1 \le x \le 2$ значення $e^{x^2} \ge e^x$, тому

$$\int_1^2 e^{x^2}dx \ge \int_1^2 e^x dx.$$

Контрольні запитання і завдання

1. У визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ вкажіть загально прийняті назви для a, b, x, $f(x)$, $f(x)dx$.
2. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла.
3. У чому полягає фізичний зміст визначеного інтеграла.
4. Користуючись адитивністю інтеграла, спробуйте обґрунтувати наступне узагальнення властивості 3:
   якщо функція $f(x)$ інтегровна на більшому з відрізків $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$, то справедлива рівність
   $$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$
5. Поясніть, чому функція Діріхле $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \text{ раціональне}; \\ 0, \text{ якщо } x \text{ ірраціональне}, \end{cases}$ не інтегровна на відрізку $[a; b]$.
6. Спробуйте довести наступне узагальнення теореми про середнє інтегральне значення: якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, а інтегровна на $[a; b]$ функція $g(x)$ невід'ємна, то існує точка $c \in [a; b]$ така, що
   $$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(c)\cdot\int_a^b g(x)dx.$$

Завдання для роботи в аудиторії.

Обчислити інтеграли, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца:

1.5. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$. 1.6. $\int_{0}^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$. 1.7. $\int_{0}^{1} (e^x - 1)^4 e^x dx$.

1.8. $\int_{0}^{1} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$. 1.9. $\int_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$. 1.10. $\int_{1}^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

1.11. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$. 1.12. $\int_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$. 1.13. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$.

1.14. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\, dx$. 1.15. $\int_{0}^{\pi/4} ctg^4\varphi\, d\varphi$.

Оцінити інтеграли:

1.16. $\int_{0}^{4} \frac{x-1}{x+1} dx$. 1.17. $\int_{1}^{4} (x+2\sqrt{x}) dx$. 1.18. $\int_{0}^{1} e^{-x^2} dx$.

1.19. $\int_{0}^{1} x^x dx$. 1.20. $\int_{1/e}^{e} x^2 e^{-x^2} dx$. 1.21. $\int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

1.22. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{8+x^2}$. 1.23. $\int_{-1}^{1} \sqrt{8+x^3} dx$. 1.11. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$.

1.12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx.$

Не обчислюючи встановити, який з інтегралів більший:

1.13. $\int_{1}^{3} 5^{x^2} dx$ чи $\int_{1}^{3} 5^{x^3} dx$. 1.14. $\int_{0}^{\pi/4} \sin x dx$ чи $\int_{0}^{\pi/4} \sin 2x dx$.

1.15. $\int_{0}^{1} \sqrt{1+x^2} dx$ чи $\int_{0}^{1} x\, dx$. 1.16. $\int_{1}^{2} \ln x dx$ чи $\int_{1}^{2} \ln^2 x dx$.

1.17. $\int_{0}^{1} x^2 \sin^2 x\, dx$ чи $\int_{0}^{1} x \sin^2 x\, dx$. 1.18. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4} dx$ чи $\int_{-1}^{1} x^2 dx$.

1.19. $\int_{1}^{e} x \ln x\, dx$ чи $\int_{1}^{e} x \ln^2 x dx$. 1.20. $\int_{0}^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx$ чи $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x\, dx.$

§2. ЗАМІНА ЗМІННОЇ У ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕГРАЛІ

Основні поняття і теореми

[1, с. 380-383; 2, с. 241-243; 3, с. 374-375]

При обчисленні визначених інтегралів, аналогічно до знаходження первісних, досить часто застосовується правило заміни змінної під знаком визначеного інтеграла.

***Теорема* 2.1.** Нехай задано інтеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$.

Введемо нову змінну t за формулою $x = \varphi(t)$.

Якщо

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$,
2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ – неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$,
3) $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на відрізку $[\alpha; \beta]$,

то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt.$$

Зауваження. При обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної не потрібно повертатися до старої змінної. Натомість слід відповідним чином змінити межі інтегрування: нижня межа $t = \alpha$ знаходиться із рівняння $\varphi(t) = a$, верхня межа $t = \beta$ – із рівняння $\varphi(t) = b$.

При „підведенні” чи „виведенні” нової змінної з під знака диференціала у визначеному інтегралі прийнято оформляти ці дії так

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \left|\begin{array}{l} x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)\,dt \\ t = \alpha \Rightarrow \varphi(\alpha) = a \\ t = \beta \Rightarrow \varphi(\beta) = b \end{array}\right| = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Наведемо також наступне узагальнення теореми 2.1.

Основна теорема про заміну змінної у визначеному інтегралі.

Нехай $x = \varphi(t)$ – неперервно диференційовна строго монотонна на відрізку $[\alpha; \beta]$. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a; b]$, то

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.$$

Слід звернути увагу на те, що умови цієї теореми для функції $f(x)$ є більш загальні ніж в попередній, але на функцію $\varphi(t)$ накладено більш жорсткі вимоги – умова строгої монотонності.

Приклади розв'язування задач.

2.1. Обчислити інтеграл шляхом заміни змінної:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} Нехай\ \sqrt{x}=t,\ тоді \\ x=t^2,\ \ dx=2tdt. \\ При\ x_1=0:\ t_1=\sqrt{0}=0; \\ при\ x_2=4:\ t_2=\sqrt{4}=2. \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{2tdt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{(t+1)-1}{t+1}dt = 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2(t - \ln|t+1|)\Big|_0^2 = 2(2-\ln 3 - 0 + \ln 1) = 4 - 2\ln 3.$$

2.2. Обчислити інтеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x=2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t\ dt, \\ \sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2|\cos t|, \\ x_1=0:\ t_1=\arcsin\frac{x}{2}=\arcsin 0=0; \\ x_2=1:\ t_2=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}. \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2|\cos t|\cdot 2\cos t\ dt =$$

$$\left|\ \text{при}\quad 0 \le t \le \frac{\pi}{6}\ \ \cos t > 0,\ \text{тому}\ |\cos t| = \cos t\ \right|$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 t\,dt = \left|2\cos^2 t = 1+\cos 2t\right| = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 2t)dt = 2(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}-0-0\right) = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.3. Обчислити інтеграл:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+4}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^x-1}=t \Rightarrow e^x-1=t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^x=t^2+1 \Rightarrow x=\ln|t^2+1| \Rightarrow dx=\frac{2t}{t^2+1}dt. \\ x_1=0:\ t_1=\sqrt{e^0-1}=0; \\ x_2=\ln 5:\ t_2=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=\sqrt{5-1}=2. \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^2 \frac{(t^2+1)\cdot t\cdot \frac{2t}{t^2+1}}{t^2+1+4}dt = \int_0^2 \frac{2t^2dt}{t^2+5} = 2\int_0^2 \frac{(t^2+5)-5}{t^2+5}dt = 2\int_0^2\left(1-\frac{5}{t^2+5}\right)dt =$$

$$= 2\left(t - 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{5}} \right) \Bigg|_0^2 = 2\left(2 - \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} - 0 + 0 \right) = 4 - 2\sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте теорему про заміну змінної під знаком невизначеного інтеграла.
2. Доведіть справедливість рівності для будь-якого a:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} \big(f(x) + f(-x)\big)dx\,.$$
3. Покажіть, що для парної на відрізку $[-a; a]$ функції $f(x)$ справедлива рівність:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\,.$$
Дайте геометричне тлумачення рівності.
4. Покажіть, що для непарної на відрізку $[-a; a]$ функції $f(x)$ справедлива рівність:
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0\,.$$
Дайте геометричне тлумачення рівності.
5. Нехай $f(x)$ – неперервна на всій осі періодична з періодом T функція. Довести, що для будь-якого дійсного a справджується рівність:
$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx\,.$$
6. Нехай $f(x)$ – неперервна на всій осі періодична функція. Покажіть, що функція
$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$
може бути подана у вигляді суми лінійної і періодичної функцій.
7. Нехай $f(x)$ – неперервна на всій осі періодична з періодом T функція. За яких умов функція
$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$
також періодична з періодом T?
8. Довести рівність
$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{0}^{b-a} f(b-x)\,dx\,.$$

Завдання для роботи в аудиторії.

За допомогою заміни змінної обчислити визначені інтеграли:

2.4. $\int\limits_{3}^{8}\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$. 2.5. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$. 2.6. $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx$.

2.7. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$. 2.8. $\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. 2.9. $\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

2.10. $\int\limits_{0}^{4}x^3\sqrt{x^2+9}dx$. 2.11. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}$. 2.12. $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

2.13. $\int\limits_{0}^{\pi}\mathrm{tg}^3\frac{x}{3}\,dx.$

Розрахунково-графічні завдання.

Задача 1. За допомогою заміни змінної обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$. 2. $\int\limits_{0}^{4}x^3\sqrt{x^2+9}dx$. 3. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\cos x\,dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x}}$. 4. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin^3 x\cdot\sin 2x\,dx$.

5. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{1+2\sin^2 x}$. 6. $\int\limits_{0}^{a}\sqrt{ax-x^2}dx$. 7. $\int\limits_{1}^{4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+1}{(\sqrt{x}+x)^2}dx$. 8. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x+\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

9. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+1}}dx$. 10. $\int\limits_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx$. 11. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 12. $\int\limits_{0}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

13. $\int\limits_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$. 14. $\int\limits_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$. 15. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx.$ 16. $\int\limits_{2}^{4/\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$.

17. $\int\limits_{1}^{3}\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$. 18. $\int\limits_{2}^{9}\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x-1}}$. 19. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$.

20. $\int\limits_{-1/2}^{0}\frac{dx}{2+\sqrt{2x+1}}$. 21. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. 22. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^{2}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

23. $\int\limits_{-\pi/2}^{0}\frac{\sin 2x\,dx}{\sin^2 x+2}$. 24. $\int\limits_{a}^{\pi/4}\mathrm{ctg}^4\varphi\,d\varphi$. 25. $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$.

§3. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Основні поняття і теореми

[1, с. 383-385; 2, с. 243-245; 3, с. 376-378]

Наступне твердження носить назву правила інтегрування частинами.

***Теорема* 3.1.** Нехай $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a; b]$, тоді

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\cdot u'(x)\,dx .$$

У стислій формі це правило записують таким чином

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = u\cdot v\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .}$$

При застосуванні цієї формули, у виразі $u\cdot v\,\Big|_a^b = u(b)\cdot v(b) - u(a)\cdot v(a)$ доцільно провести необхідні обчислення та надалі подавати його як число.

Оскільки математичні моделі більшості технічних задач містять, так звані, кусково-неперервно диференційовні функції, то наведемо наступне узагальнення теореми 3.1.

***Теорема* 3.2.** Нехай $u(x)$ і $v(x)$ неперервні і кусково-неперервно диференційовні на відрізку $[a; b]$, тоді для них справедлива формула інтегрування частинами.

Наслідок 1. Формула Тейлора.

Нехай функція $f(x)$ має $(n+1)$ неперервну похідну на відрізку $[a; x]$, тоді за формулою Ньютона-лейбніца

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt .$$

Виконаємо інтегрування частинами

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt = \begin{vmatrix} u = f'(x), & du = f''(t)\,dt \\ dv = dt, & v = -(x-t) \end{vmatrix} = f'(a)\cdot(x-a) + \int_a^x f''(t)\cdot(x-t)\,dt .$$

Послідовно інтегруючи частинами n раз, отримуємо

$$f(x) = f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)\cdot(x-a)^2 + ... + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\cdot(x-a)^n +$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)\,dt.$$

Ця формула носить назву формули Тейлора із інтегральним залишком.

Наслідок 2. Формула Валліса.

Розглянемо інтеграл $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$.

Обчислимо його, застосовуючи правило інтегрування частинами:

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x\, d(\cos x) =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin^{n-2} x\, dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2 x\right) \cdot \sin^{n-2} x\, dx = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right).$$

Звідси, отримуємо рекурентну формулу: $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \geq 2$.

Легко бачити, що $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ і $I_1 = 1$, тому

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \ldots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

і $$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Беручи частку I_{2n} / I_{2n+1} останніх двох формул, отримуємо відому формулу Валліса:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2n+1}.$$

Приклади розв'язування задач.

Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

3.1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3) \sin ax\, dx =$

Застосуємо формулу інтегрування частинами: $\int\limits_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int\limits_a^b v \cdot du.$

$$\left| \begin{array}{lcl} u = x+3 & \Rightarrow & du = dx \\ dv = \sin ax dx & \Rightarrow & v = -\dfrac{1}{a}\cos ax \end{array} \right| = -\frac{x+3}{a}\cos ax \Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos ax dx =$$

$$=-\frac{\frac{\pi}{2a}+3}{a}\cos\frac{\pi}{2}+\frac{3}{a}\cos 0+\frac{1}{a^2}\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}}=0+\frac{3}{a}+\frac{1}{a^2}\sin\frac{\pi}{2}-0=\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{1+3a}{a^2}.$$

3.2.

$$\int_0^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx=\left|\begin{array}{l}\int_a^b u\cdot dv=u\cdot v\big|_a^b-\int_a^b v\cdot du;\\ x=u\Rightarrow du=(x)'dx\Rightarrow du=dx\\ \mathrm{tg}^2 x\,dx=dv\Rightarrow v=\int\mathrm{tg}^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\\ \qquad=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\mathrm{tg}\,x-x\end{array}\right|=$$

$$=(x(\mathrm{tg}\,x-x))\big|_0^{\pi/4}-\int_0^{\pi/4}(\mathrm{tg}\,x-x)dx=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\ln|\cos x|-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}-\left(-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi^2}{32}+0+0\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{16}-\ln\sqrt{2}+\frac{\pi^2}{32}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\ln\sqrt{2}.$$

3.3.

$$\int_0^3 x\cdot\mathrm{arctg}\,x\,dx=\left|\begin{array}{l}\mathrm{arctg}\,x=u\Rightarrow du=\dfrac{dx}{1+x^2}\\ x\,dx=dv\Rightarrow v=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\left(\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x\right)\Bigg|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{x^2dx}{x^2+1}=$$

$$=\left(\frac{9}{2}\mathrm{arctg}\,3-0\right)-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx=\frac{9}{2}\mathrm{arctg}\,3-\frac{1}{2}\int_0^3\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{9}{2}\mathrm{arctg}\,3-\frac{1}{2}\left(x-\mathrm{arctg}\,x\right)\big|_0^3=\frac{9}{2}\mathrm{arctg}\,3-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,3=5\,\mathrm{arctg}\,3-\frac{3}{2}.$$

3.4.

$$\int_1^e(1+\ln x)^2\,dx=\left|\begin{array}{l}(1+\ln x)^2=u\Rightarrow du=2(1+\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}dx\\ dx=dv\Rightarrow v=x\end{array}\right|=$$

$$=(x(1+\ln x)^2)\big|_1^e-\int_1^e x\cdot 2(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx=\left(e(1+1)^2-(1+\ln 1)^2\right)-\int_1^e 2(1+\ln x)dx=$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\ln x = u \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x} \\ 2dx = dv \Rightarrow v = 2x \end{vmatrix} = 4e - 1 - \left((2x(1+\ln x))\Big|_1^e - \int_1^e \frac{2x\,dx}{x} \right) =$$

$$= 4e - 1 - (4e-2) + 2x\,\Big|_1^e = 4e - 1 - 4e + 2 + 2e - 2 = 2e - 1.$$

3.5.

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = \begin{vmatrix} e^{2x} = u \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ \cos x\,dx = dv \Rightarrow v = \sin x \end{vmatrix} = e^{2x}\sin x\,\Big|_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\sin x\,dx =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{2x} = u \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ \sin x\,dx = dv \Rightarrow v = -\cos x \end{vmatrix} = e^{\pi} - 2\left(-e^{2x}\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx \right) =$$

$$= e^{\pi} - 2(-e^{\pi}\cdot 0 + e^{0}\cdot 1) - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx.$$

Маємо рівність:

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx \Rightarrow 5\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = e^{\pi} - 2.$$

З цієї рівності визначимо шуканий інтеграл:

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{5}\left(e^{\pi} - 2\right).$$

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте правило інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.
2. Нагадайте типи підінтегральних функцій, які рекомендовано до інтегрування частинами.
3. За допомогою теореми про середнє інтегральне значення та формули Тейлора із інтегральним залишком спробуйте отримати відому формулу Тейлора із залишком у формі Лагранжа.
4. Нехай $f(x)$ має обмежену похідну на $[a; b]$. Довести, що

   а) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cdot\sin^2 nx\,dx = \dfrac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx$.
5. Довести, що:

   а) $\left|\int_x^{x+a} \dfrac{\sin t}{t}\,dt\right| < \dfrac{3}{x}$, $x > 0$, $a > 0$; б) $\left|\int_x^{x+a} \sin t^3\,dt\right| < \dfrac{4}{3x^2}$, $x > 0$, $a > 0$.

Завдання для роботи в аудиторії.

Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

3.6. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$. 3.7. $\int\limits_0^{1/2} \arcsin x\,dx$. 3.8. $\int\limits_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$.

3.9. $\int\limits_0^1 x\arccos x\,dx$. 3.10. $\int\limits_0^{e^2} x^2 \ln x\,dx$. 3.11. $\int\limits_0^{\pi/2} x^2 \cos x\,dx$;

3.12. $\int\limits_0^{a/\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$. 3.13. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$. 3.14. $\int\limits_1^{e} \sin(\ln x)dx$.

3.15. $\int\limits_0^1 e^{2x} \cdot \sin 2x\,dx$. 3.16. $\int\limits_0^1 e^{2x} \cdot \cos 2x\,dx$.

Розрахунково-графічні завдання.

Задача 2. Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

1. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2-5x+6)\cos 2x\,dx$.
2. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2-4)\cos 3x\,dx$.
3. $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+4x+3)\cos x\,dx$.
4. $\int\limits_{-2}^{0}(x+2)^2\cos 3x\,dx$.
5. $\int\limits_{-4}^{0}(x^2+7x+12)\cos x\,dx$.
6. $\int\limits_{0}^{\pi}(2x^2+4x+7)\cos 2xdx$.
7. $\int\limits_{0}^{\pi}(9x^2+9x+11)\cos 3x\,dx$.
8. $\int\limits_{0}^{\pi}(8x^2+16x+17)\cos 4x\,dx$.
9. $\int\limits_{0}^{2\pi}(3x^2+5)\cos 2x\,dx$.
10. $\int\limits_{0}^{2\pi}(2x^2-15)\cos 3x\,dx$.
11. $\int\limits_{0}^{\pi/2}(1-5x^2)\sin x\,dx$.
12. $\int\limits_{0}^{2\pi}(1-8x^2)\cos 4x\,dx$.
13. $\int\limits_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\sin 3x\,dx$.
14. $\int\limits_{0}^{3}(x^2-3x)\sin 2x\,dx$.
15. $\int\limits_{0}^{\pi}(x^2-3x+2)\sin x\,dx$.
16. $\int\limits_{0}^{\pi/2}(x^2-5x+6)\sin 3x\,dx$.

17. $\int\limits_{-3}^{0}(x^2+6x+9)\sin 2x\,dx$.

18. $\int\limits_{0}^{\pi/4}(x^2+17.5)\sin 2x\,dx$.

19. $\int\limits_{0}^{\pi/2}(1-5x^2)\sin x\,dx$.

20. $\int\limits_{\pi/4}^{0}(3x-x^2)\sin 2x\,dx$.

21. $\int\limits_{0}^{1}(x+1)\ln^2(x+1)\,dx$.

22. $\int\limits_{0}^{2}(x+1)^2\ln^2(x+1)\,dx$.

23. $\int\limits_{0}^{1}x^2e^{3x}\,dx$.

24. $\int\limits_{-2}^{0}(x^2+2)e^{\frac{x}{2}}\,dx$.

25. $\int\limits_{1}^{2}x\ln^2 x\,dx$.

§4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ З НЕСКІНЧЕННИМИ МЕЖАМИ (1-ГО РОДУ)

Основні поняття і теореми

[1, с. 385-390; 2, с. 249-260; 3, с. 378-381]

Нехай функція $f(x)$ інтегровна на кожному відрізку $[a; b]$ множини дійсних чисел.

Вираз $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)\,dx$ називають *невласним інтегралом першого роду* від функції $f(x)$ на промені $[a; +\infty)$. За означенням

$$\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx.$$

Якщо границя в правій частині рівності існує, то невласний інтеграл називається *збіжним*. Якщо ж границя не існує, то інтеграл називається *розбіжним*. Таким чином, питання про збіжність невласного інтеграла рівносильне питанню означеності цього інтеграла. Аналогічно, вираз

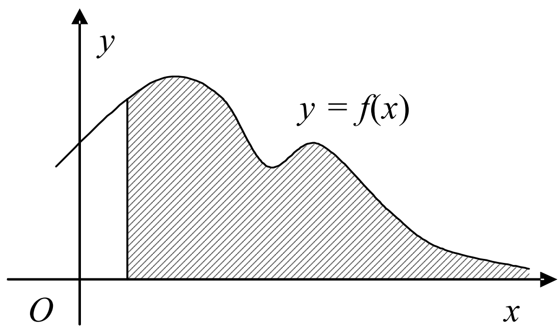
$$\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx$$

задає невласний інтеграл від $f(x)$ на проміжку $(-\infty; b)$.

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається рівністю

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{c}f(x)\,dx+\int\limits_{c}^{+\infty}f(x)\,dx,$$

де c – довільним чином вибране число. Цей інтеграл називається збіжним лише тоді, коли збігається кожний із інтегралів правої частини рівності.



<u>Геометричне тлумачення.</u> Для додатної функції $f(x)$ вважають, що інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ виражає площу необмеженої фігури, яка знаходиться між графіком функції $y = f(x)$, $x \ge a$, та віссю абсцис.

Властивості невласного інтеграла першого роду.

А) *<u>Властивість лінійності.</u>* Якщо інтеграли $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ та $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ збігаються, то для довільних сталих α і β справедлива рівність

$$\int\limits_a^{+\infty} \big(\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)\big)\,dx = \alpha \cdot \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \cdot \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx .$$

В) *<u>Властивість адитивності.</u>* Якщо $a < c < +\infty$, то

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{c} f(x)\,dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)\,dx .$$

Зауваження. Методи інтегрування частинами та заміни змінної для невласних інтегралів узагальнюються при суттєвих обмеженнях на підінтегральні функції. Тому для уникнення можливих помилок названі методи краще застосовувати під знаком визначеного інтеграла у границі

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^{b} f(x)\,dx .$$

Достатні ознаки збіжності. Використовують у тих випадках, коли потрібно з'ясувати питання існування інтеграла.

1. Збіжність невласного інтеграла від невід'ємної функції записують наступним чином $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$, якщо інтеграл розбіжний, то пишуть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.
2. *<u>Перша ознака порівняння.</u>* Нехай на проміжку $a \le x < +\infty$ функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умові $0 \le f(x) \le g(x)$. Тоді:

   а) якщо $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty \Rightarrow$ існує $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx < \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$;

   б) якщо $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$.

3. <u>*Друга ознака порівняння.*</u> Нехай задані функції $f(x)$ і $g(x)$ задовольняють умові

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k,\ \ 0<k<+\infty.$$

Тоді інтеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \ \text{ і } \ \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

збігаються або розбігаються одночасно.

4. <u>*Частинна ознака порівняння.*</u> Якщо існує

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha}\cdot f(x)=k\in(0;+\infty),$$

то

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \begin{cases} <+\infty, \text{ при } \alpha>1; \\ =+\infty, \text{ при } \alpha\le 1. \end{cases}$$

5. <u>*Теорема про абсолютну збіжність.*</u> Якщо інтеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx<+\infty,$$

то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ збіжний і

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right|<\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається <u>*абсолютно збіжним*</u>, якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Збіжний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ називається <u>*умовно збіжним*</u>, якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ розбіжний.

Прикладом умовної збіжності може служити інтеграл

$$\int_a^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx,\ a>0.$$

Приклади розв'язування задач.

Обчислити інтеграли з нескінченними межами або встановити їх розбіжність:

4.1.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x},\ a>1.$$

Розв'язання.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\ln x\,\Big|_a^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(\ln\ln b - \ln\ln a\right) = +\infty.$$

Тобто інтеграл розбіжний.

4.2.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} x\,\Big|_a^0\right) = \lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) = 0 + \frac{\pi}{2} =$$

$= \frac{\pi}{2}$, тобто інтеграл збіжний.

4.3.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int_1^{+\infty} \operatorname{arctg} x\, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}\Bigg|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right) =$$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{3\pi^2}{32}$, тобто інтеграл збіжний.

Встановити збіжність або розбіжність інтегралів:

4.4.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3}dx.$$

Розв'язання.

Так як $|\cos x| \le 1$, то $\left|\frac{\cos x}{x^3}\right| \le \left|\frac{1}{x^3}\right|$; оскільки $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ – збіжний, то за 1-ою ознакою збіжності невласних інтегралів 1-го роду даний інтеграл збігається.

4.5.

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Розв'язання.

Так як $\ln x \geq 1$ при $x \in [e; +\infty)$, то $\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \geq \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; оскільки $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ – розбіжний, то за 1-ою ознакою збіжності невласних інтегралів 1-го роду заданий інтеграл розбіжний.

4.6.

$$\int_{1}^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\,dx.$$

Розв'язання.

По таблиці еквівалентності $\ln(1+\alpha) \sim \alpha, \alpha \to 0$, тому:

$$f(x) = \ln\frac{x^2+2}{x^2+1} = \ln\frac{(x^2+1)+1}{x^2+1} = \ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right) \sim \frac{1}{x^2+1} \sim \frac{1}{x^2} = g(x),$$

при $x \to \infty$.

Оскільки $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається, то за 2-ою ознакою збіжності невласних інтегралів 1-го роду заданий інтеграл збігається.

Контрольні запитання і завдання

1. Чому в означенні невласного інтеграла
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$
число c є довільним?
2. Покажіть, що $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} < +\infty, \text{ при } \alpha > 1; \\ = +\infty, \text{ при } \alpha \leq 1. \end{cases}$
3. Обґрунтуйте властивості лінійності та адитивності для невласних інтегралів першого роду.
4. Чому для невід'ємних функцій запис $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$ означає збіжність інтеграла?

5. Нехай $u(x)$, $v(x)$ – неперервно диференційовні при $x \geq a$ і $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)\cdot v(x) = 0$. Покажіть, що $\int\limits_a^{+\infty} u\,dv = -u(a)\cdot v(a) - \int\limits_a^{+\infty} v\,du$.

6. Нехай $|f(x)| \leq g(x)$, $x \in [a; +\infty)$ і $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$. Покажіть абсолютну інтегровність функції $f(x)$ на $[a; +\infty)$.

7. Обґрунтуйте збіжність інтегралу $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$, $a > 0$, використовуючи формулу $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\cos a}{a} - \int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$.

8. Покажіть умовну збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$, $a > 0$, спираючись на нерівність $|\sin x| \geq \sin^2 x$.

Завдання для роботи в аудиторії.

Обчислити інтеграли з нескінченними межами:

4.7. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$. 4.8. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{x^3+7}$. 4.9. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}dx$. 4.10. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

4.11. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$. 4.12. $\int\limits_0^{+\infty} x\cos x\,dx$. 4.13. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$; 4.14. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$.

4.15. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$. 4.16. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx$. 4.17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

4.18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\,dx}{x^2+1}$. 4.19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Дослідити на збіжність інтеграли з нескінченними межами:

4.20. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{5+2x^2+3x^4}$. 4.21. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^2+\sqrt[3]{x^5}+1}dx$. 4.22. $\int\limits_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$.

4.23. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{5+\cos x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. 4.24. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$. 4.25. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$.

4.26. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln(\ln x)}$. 4.27. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$. 4.28. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}dx$. 4.29. $\int\limits_0^{+\infty} \sqrt{x}\cdot e^{-x}dx$.

§5. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ВІД РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ (2-ГО РОДУ)

Основні поняття і теореми

[1, с. 391-394; 2, с. 260-262; 3, с. 382-384]

В цьому параграфі розглядаємо узагальнення поняття інтеграла на випадок необмежених функцій. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a; c)$ і інтегровна на кожному відрізку $[a; b]$, де $a < b < c$. Точка $x = c$ називається *особливою* для $f(x)$, якщо функція не обмежена на кожному інтервалі $(b; c)$.

Невласним інтегралом другого роду від функції $f(x)$ з особливістю в точці c називають

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Якщо границя в правій частині рівності існує, то інтеграл називають *невласним збіжним інтегралом*, в протилежному випадку інтеграл називають *розбіжним*.

Аналогічно, якщо точка $x = a$ особлива для $f(x)$, $x \in (a; c]$, то *невласний інтеграл* визначається так:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{b \to a+0} \int_b^c f(x)\,dx.$$

Якщо точки $x = a$ і $x = c$ особливі для функції $f(x)$, $x \in (a; c)$, то *невласний інтеграл* визначають рівністю

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx,$$

де $a < b < c$.

Інтеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ називається *збіжним* лише за умови збіжності обох невласних інтегралів $\int_a^b f(x)\,dx$ і $\int_b^c f(x)\,dx$.

Нарешті, якщо функція $f(x)$ має особливість (розрив) у внутрішній точці $x = b$ відрізка $[a; c]$, то за означенням

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Цей інтеграл є збіжним за умови збіжності кожного із інтегралів правої частини рівності.

Зауваження. Основні положення і теореми попереднього параграфа для невласних інтегралів першого роду без значних ускладнень можуть бути перенесені на випадок інтегралів другого роду. Нехай лише $x = c$ – особлива точка для $f(x)$ на $[a;\, c)$, виконаємо заміну змінної під інтегралом:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = c - \dfrac{1}{t}, \qquad dx = \dfrac{1}{t^2}\,dt \\ t = \dfrac{1}{c-x} \\ a \le x \le c \Rightarrow \dfrac{1}{c-a} \le t < +\infty \end{array} \right| = \int_{\frac{1}{c-a}}^{+\infty} f\left(c - \frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2} \cdot dt\,.$$

Як бачимо, із збіжності одного із інтегралів слідує збіжність іншого та рівність цих інтегралів. Але при розв’язуванні задач не раціонально кожного разу в невласних інтегралах другого роду проводити вказану заміну змінної.

Сформулюємо ***ознаки збіжності*** для ***невласних інтегралів другого роду***.

1. *<u>Перша ознака порівняння.</u>* Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[a;\, c)$ мають особливості в точці $x = c$ та задовольняють нерівності $0 \le f(x) \le g(x)$. Тоді:

   а) якщо $\int_a^c g(x)\,dx$ збігається, то $\int_a^c f(x)\,dx$ також збігається;

   б) якщо $\int_a^c f(x)\,dx$ розбігається, то $\int_a^c g(x)\,dx$ розбігається.

2. *<u>Друга ознака порівняння.</u>* Нехай додатні функції $f(x)$ і $g(x)$ на проміжку $[a;\, c)$ мають особливості в точці $x = c$ та задовольняють умову

   $$\lim_{x \to c-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \;\; 0 < k < +\infty\,.$$

   Тоді інтеграли $\int_a^c f(x)\,dx$ і $\int_a^c g(x)\,dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

3. В якості *<u>функції „еталонів”</u>*, з якими зручно порівнювати задані в умові підінтегральні функції досить часто використовують функції $\dfrac{1}{(c-x)^{\alpha}}$. Важливим є такий факт, що

   $$\int_a^c \frac{1}{(c-x)^{\alpha}}\,dx \;\begin{cases} \textit{збігається при } \alpha < 1; \\ \textit{розбігається при } \alpha \ge 1. \end{cases}$$

4. <u>*Абсолютна збіжність*</u>. Якщо $x = c$ – особлива точка функції $f(x)$ на $[a;\, c)$ і інтеграл $\int\limits_a^c |f(x)|\,dx$ збігається, то інтеграл $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ також збігається.

<u>*Головне значення невласного інтеграла*</u>. Крім розглянутого вище поняття невласного інтеграла в чисельних методах та математичній фізиці широко використовують поняття інтеграла по Коші в розумінні головного значення "Valuer principal", яке надалі позначаємо символом $V.P.\int\limits_a^c f(x)\,dx$.

Означення. Нехай функція $f(x)$ має особливість у внутрішній точці $x = b$ відрізка $[a;\, c]$. Функція $f(x)$ <u>*інтегровна по Коші*</u>, якщо існує границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx + \int\limits_{b+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx\right) = V.P.\int\limits_a^c f(x)\,dx,$$

яка має назву <u>*головного значення інтеграла*</u>.

П р и к л а д . Інтеграл

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{x-1}$$

розбігається як невласний інтеграл другого роду, але існує як головне значення по Коші:

$$V.P.\int\limits_0^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x-1}\right) = \ln 2.$$

Приклади розв'язування задач.

Обчислити інтеграли від розривних функцій або встановити їх збіжність чи розбіжність:

5.1.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв'язання.

Функція $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ неперервна при $0 \le x < 1$ і має нескінченний розрив в точці $x = 1$, тому маємо

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

5.2.

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\, dx.$$

Розв'язання.

Функція $f(x) = \operatorname{ctg} x$ не визначена в точці $x = 0$, тому маємо

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \operatorname{ctg} x\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln|\sin x| \Big|_{\varepsilon}^{\pi/4} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln \varepsilon \right) = \infty,$$

тобто інтеграл розбіжний.

5.3.

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Розв'язання.

Функція $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ неперервна при $x \in (0;1) \cup (1;3)$ і має нескінченний розрив в точці $x = 1$, тому за означенням маємо

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

оскільки перший доданок $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} \Big|_0^1 = \infty - 1 = \infty$ є розбіжний інтеграл, то і заданий інтеграл розбіжний.

5.4.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 5x^4}.$$

Розв'язання.

Функція $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} + 5x^4}$ має нескінченний розрив в точці $x = 0$. Для всіх $x \in (0;1)$ виконується нерівність

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x} + 5x^4} < \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ і } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} < +\infty$$

– збігається, тому $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 5x^4} < +\infty$ – збігається також.

5.5.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}.$$

Розв'язання.

Функція $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ має особливість в точці $x=0$. По таблиці еквівалентності $\sin\alpha \sim \alpha, \alpha \to 0$. Тому $f(x)=\dfrac{1}{\sin x} \sim \dfrac{1}{x} = g(x)$, при $x \to 0$. Оскільки $\int_0^1 \dfrac{dx}{x}$ – розбіжний, то заданий інтеграл також розбігається.

Контрольні запитання і завдання

1. Покажіть, що $\int_a^c \dfrac{1}{(x-a)^\alpha}dx \begin{cases} \textit{збігається при } \alpha<1; \\ \textit{розбігається при } \alpha \ge 1. \end{cases}$
2. Дайте означення невласного інтеграла від функції $f(x)$ з особливостями в точках $\{b_k\}$: $a < b_1 < b_2 < \ldots < b_n < c$.
3. Дайте геометричне тлумачення невласного інтеграла другого роду.
4. Дайте означення абсолютної та умовної збіжності невласного інтеграла другого роду.
5. Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ на проміжку $[a; c)$ мають особливості в точці $x=c$ та задовольняють нерівності $|f(x)| \le g(x)$. Покажіть, що коли інтеграл $\int_a^c g(x)\,dx$ збіжний, то інтеграл $\int_a^c f(x)\,dx$ також збіжний і
$$\left|\int_a^c f(x)\,dx\right| \le \int_a^c g(x)\,dx.$$

Завдання для роботи в аудиторії.

Обчислити інтеграли від розривних функцій або встановити їх розбіжність:

5.6. $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 5.7. $\int_1^2 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$. 5.8. $\int_0^1 x\ln x\,dx$. 5.9. $\int_1^{1/e} \dfrac{dx}{x\cdot \ln^2 x}$.

5.10. $\int_0^2 \dfrac{dx}{x^2-4x+3}$. 5.11. $\int_3^5 \dfrac{x^2dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$. 5.12. $\int_0^1 \dfrac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

5.13. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$.

5.14. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$.

5.15. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$.

5.16. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

5.17. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$.

Дослідити збіжність інтегралів:

5.18. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

5.19. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

5.20. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

5.21. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$.

5.22. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}dx$.

5.23. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$.

5.24. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x-\cos x}$.

5.25. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

5.26. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$.

5.27. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$.

§6. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ФІГУР

Основні поняття і теореми

[1, с. 401-404; 2, с. 263-264; 3, с. 401-405]

Множина F точок площини називається *обмеженою*, якщо існує круг, який повністю містить всі точки множини F. Довільну обмежену множину точок площини називають плоскою фігурою. Фігуру називають *многокутною*, якщо вона складена із скінченного числа обмежених многокутників. Площу многокутної фігури можна обчислити, наприклад, як суму площ трикутників, що утворюються при „розрізанні” многокутника.

Надалі площу многокутної фігури F будемо позначати символом пл(F).

Нагадаємо ***основні властивості площі***:

1. *Невід'ємність.* Площа многокутної фігури є невід'ємним числом: пл$(F) \geq 0$.
2. *Інваріантність.* Якщо многокутні фігури F_1 і F_2 рівні, між собою, то пл(F_1) = пл(F_2).
3. *Адитивність.* Якщо F_1 і F_2 – дві многокутні фігури без спільних внутрішніх точок, то пл$(F_1 \cup F_2)$ = пл(F_1) + пл(F_2).
4. *Монотонність.* Якщо многокутна фігура F_1 міститься в многокутній фігурі F_2: $F_1 \subset F_2$, то пл$(F_1) \leq$ пл(F_2).

Перейдемо до означення площі довільної фігури Ф.

Розглянемо всі можливі многокутні фігури P, що повністю містяться в Ф, і многокутні фігури Q, що повністю містять фігуру Ф. Фігури P прийнято називати вписаними в Ф, а фігури Q – описаними.

Послідовність вписаних фігур $\{P_n\}$ називають вичерпуючою знизу фігуру Φ, якщо виконуються дві умови:

1) $P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \ldots \subset \Phi$;

2) кожна точка фігури Ф належить всім P_n, починаючи з якогось номера $n_0 = n(M)$.

Площі α_n = пл(P_n) утворюють монотонно зростаючу послідовність чисел, крім того, α_n = пл$(P_n) \leq \pi R^2$, де R – радіус круга, що містить фігуру Ф. Тоді існує границя послідовності $\{\alpha_n\}$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \text{пл}(P_n) \equiv \text{пл}_*(\Phi),$$

яку прийнято називати *нижньою площею* фігури Ф.

Послідовність описаних фігур $\{Q_n\}$ називають вичерпуючою зверху фігуру Ф, якщо:

1) $Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n \supset Q_{n+1} \supset \ldots \supset \Phi$;

2) кожна точка N, що не належить Ф не належить також і всім Q_n, починаючи з якогось номера $n_0 = n(N)$.

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \text{пл}(Q_n) \equiv \text{пл}^*(\Phi)$$

називається <u>*верхньою площею*</u> фігури Ф.

Очевидно, що $\text{пл}_*(\Phi) \le \text{пл}^*(\Phi)$.

Означення. Плоска фігура Ф називається <u>*квадровною*</u> або такою, що <u>*має площу*</u>, якщо її верхня та нижня площі співпадають. При цьому число $\text{пл}_*(\Phi) = \text{пл}^*(\Phi) \equiv \text{пл}(\Phi)$ називається <u>*площею*</u> фігури Ф.

Зауваження. Вперше приклад неквадровної фігури (такої, що не має площі) було наведено італійським математиком Пеано (1858–1932).

Означення. <u>*Криволінійною трапецією*</u> $\Phi_a^b(f)$ називається фігура, обмежена графіком неперервної і невід'ємної функції $f(x)$, перпендикулярними до осі Ox прямими $x = a$ і $x = b$ та відрізком осі Ox між точками a і b:

$$\Phi_a^b(f) = \left\{ (x;y) \in R^2 \left| \begin{matrix} a \le x \le b, \\ 0 \le y \le f(x) \end{matrix} \right. \right\}.$$

Теорема. Криволінійна трапеція є квадровною фігурою, площа S, якої обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Наслідок 1. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ змінює знак, то площа фігури, обмеженої графіком $y = f(x)$ і віссю Ox обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Наслідок 2. Площа криволінійного прямокутника

$$\Pi_a^b(f_1;f_2) = \left\{ (x;y) \in R^2 \left| \begin{matrix} a \le x \le b, \\ f_1(x) \le y \le f_2(x) \end{matrix} \right. \right\},$$

обмеженого неперервними кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і вертикальними прямими $x = a$ та $x = b$ за умови, що $f_2(x) \ge f_1(x)$, обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$$

Наслідок 3. Якщо криволінійна трапеція обмежена параметрично заданою гладкою кривою $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \ge 0, \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ і віссю Ox, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot |\varphi'(t)| \cdot dt.$$

Наслідок 4. Площа криволінійного сектора

$$\Phi_{\alpha}^{\beta}(\rho)=\left\{(\varphi;\rho)\left|\begin{matrix}\alpha\le\varphi\le\beta,\\ 0\le\rho\le\rho(\varphi)\end{matrix}\right.\right\},$$

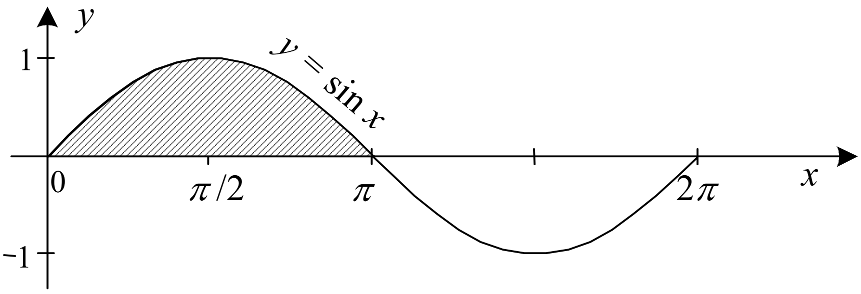
обмеженого неперервною кривою $\rho=\rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$ в полярній системі координат, обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Приклади розв'язування задач.

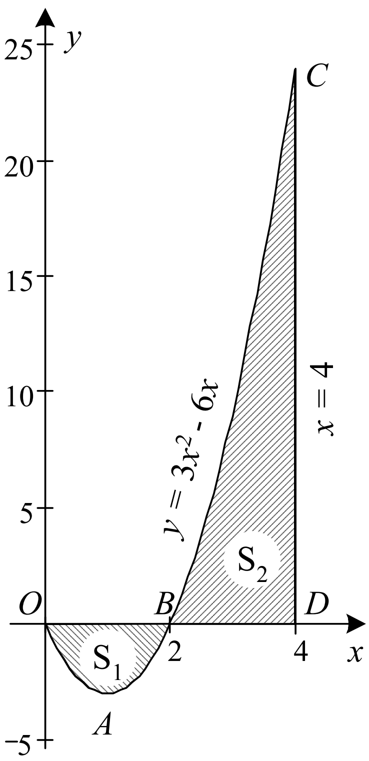
6.1. Знайти площу фігури, обмеженої синусоїдою $y=\sin x$ на відрізку $[0;\pi]$ та віссю Ox.

Розв'язання.



На інтервалі $(0;\pi)$ функція $f(x)=\sin x$ зберігає знак, а тому за формулою $S=\int\limits_a^b f(x)\,dx$ одразу знаходимо

$$S=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-(-1-1)=2.$$



6.2. Обчислити площу, обмежену прямою $x=4$, параболою $y=3x^2-6x$ на відрізку $[0;4]$ та віссю Ox.

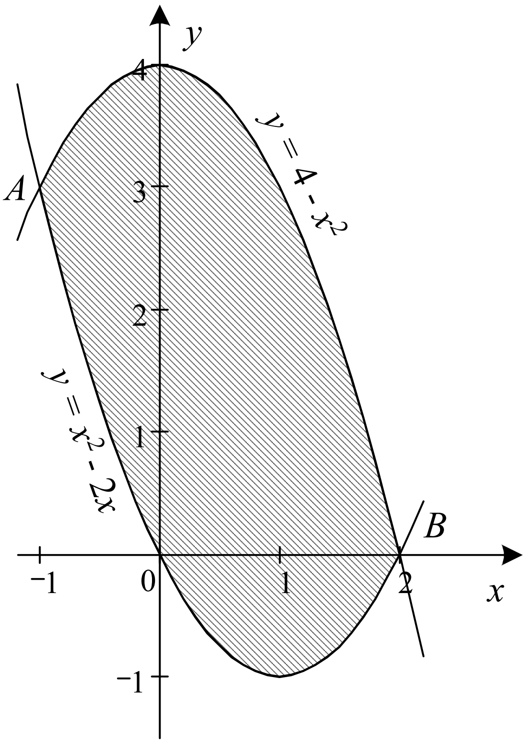
Розв'язання.

Трапеція OAB розташована під віссю, а трапеція BCD – над віссю Ox. Тому відрізок інтегрування $[0;4]$ має бути розділений на два: $[0;2]$ і $[2;4]$. Знайдемо

$$S=S_1+S_2=-\int_0^2(3x^2-6x)dx+\int_2^4(3x^2-6x)dx=$$

$$=-(x^3-3x^2)\Big|_0^2+(x^3-3x^2)\Big|_0^2=-(8-12)+(64-48-8+12)=4+20=24.$$

6.3. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y=4-x^2$ та $y=x^2-2x$.



Розв'язання.

Розв'язавши систему $\begin{cases} y=4-x^2, \\ y=x^2-2x, \end{cases}$ визначимо точки перетину парабол $A(-1;\,3)$ B(2; 0). Парабола $y=4-x^2$ обмежує фігуру зверху, а парабола $y=x^2-2x$ – знизу. Тому за формулою

$$S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx,\ f(x)\ge g(x),$$

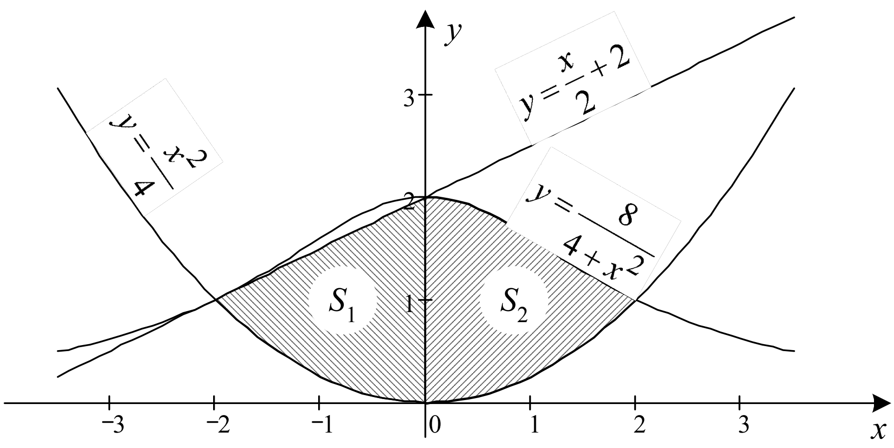
визначимо площу

$$S=\int_{-1}^{2}\left((4-x^2)-(x^2-2x)\right)dx=$$

$$\int_{-1}^{2}\left(4+2x-2x^2\right)dx=\left(4x+x^2-\frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{2}=9.$$

6.4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\dfrac{x}{2}+2$ і $y=\dfrac{x^2}{4}$ при $x\le 0$ та лініями $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ і $y=\dfrac{x^2}{4}$ при $x\ge 0$.

Розв'язання.



Знайдемо точки перетину прямої $y=\dfrac{x}{2}+2$, що обмежує фігуру зверху, і параболи $y=\dfrac{x^2}{4}$, яка обмежує фігуру знизу. Розв'язавши рівняння

$$\frac{x^2}{4}=\frac{x}{2}+2,\; x^2-2x-8=0,\; x_1=-2,\; x_2=4,$$

отримаємо, що в лівій півплощині знаходиться лише одна точка перетину $(-2;1)$. Тому за формулою $S=\int\limits_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx,\; f(x)\ge g(x),$ площа S_1 визначиться за допомогою інтеграла $S_1=\int\limits_{-2}^{0}\left(\left(\frac{x}{2}+2\right)-\frac{x^2}{4}\right)dx.$

В правій частині площини фігуру обмежує зверху локон Аньєзі $y=\frac{8}{4+x^2}$, а знизу парабола $y=\frac{x^2}{4}$. Розв'яжемо рівняння

$$\frac{x^2}{4}=\frac{8}{4+x^2},\; \frac{x^4+4x^2-32}{4(4+x^2)}=0,\; x_1=-2,\; x_2=2.$$

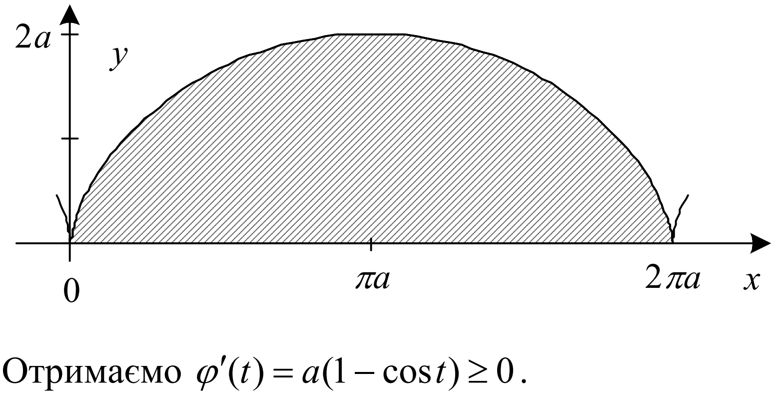
Отримаємо, що $S_2=\int\limits_0^2\left(\frac{8}{4+x^2}-\frac{x^2}{4}\right)dx.$ Отже загалом шукана площа дорівнює

$$S=S_1+S_2=\int\limits_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+2-\frac{x^2}{4}\right)dx+\int\limits_0^2\left(\frac{8}{4+x^2}-\frac{x^2}{4}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{4}+2x-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}\right)\Bigg|_0^2=-\left(1-4+\frac{2}{3}\right)+\left(4\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)=\pi+\frac{5}{3}.$$

6.5. Знайти площу фігури, обмеженої віссю Ox та однією аркою циклоїди $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}\; 0\le t\le 2\pi.$

Розв'язання.



У формулі

$$S=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\cdot|\varphi'(t)|\,dt$$

необхідно взяти

$\psi(t)=y=a(1-\cos t)$;

$\varphi'(t)$ знаходять з рівняння

$\varphi(t)=x=a(t-\sin t)$.

Отримаємо $\varphi'(t)=a(1-\cos t)\ge 0$.

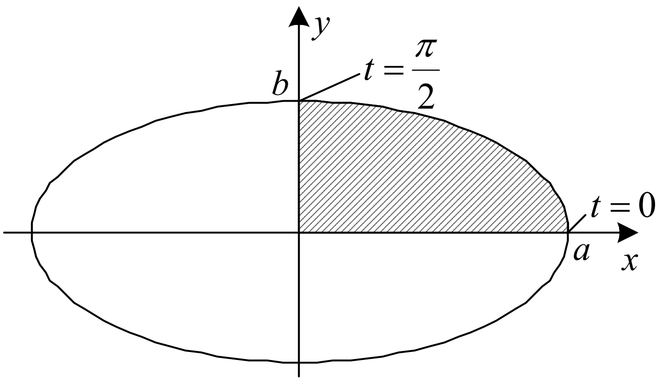
Межі інтегрування від 0 до 2π. Тому $|\varphi'(t)|=a(1-\cos t)$.

$$S=\int\limits_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=$$

$$=a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

6.6. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$

Розв'язання.



Осі координат ділять даний еліпс на чотири однакові частини. Четверту частину шуканої площі S, розташовану в першій координатній чверті, знайдемо як площу криволінійної трапеції:

$$S=\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\cdot|\varphi'(t)|\,dt\,.$$

Користуючись параметричними рівняннями еліпса, отримаємо

$$\psi(t)=b\sin t,\ \varphi(t)=a\cos t\Rightarrow\varphi'(t)=-a\sin t.$$

Оскільки для точок першої чверті $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\sin t\ge 0$, то $|\varphi'(t)|=a\sin t$.

Обчислимо

$$\frac{S}{4}=\int\limits_0^{\pi/2} b\sin t\cdot a\sin t\,dt=ab\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi ab}{4}.$$

Отже $S=\pi ab$.

6.7. Знайти площу, між віссю Ox та локоном Аньєзі, що визначається рівнянням $\begin{cases} x=t, \\ y=\dfrac{a^3}{a^2+t^2}. \end{cases}$

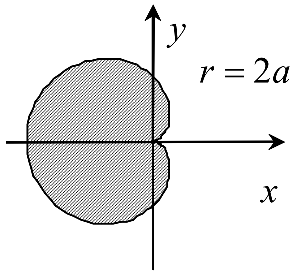
Розв'язання.

Крива симетрична відносно осі Oy (див. рисунок задачі 1.3.). На всій площині абсциса точки кривої змінюється від $-\infty$ до $+\infty$, а так як $x=t$ (перше рівняння), то параметр t змінюється в тих же межах. Отже

$$S=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^3}{a^2+t^2}dt=a^3\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{a^2+t^2}=a^3\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}=a^2(\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}(-\infty))=$$
$$=a^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi a^2.$$

6.8. Знайти площу, обмежену кардіоїдою $r=2a(1-\cos\varphi)$.

Розв'язання.



Оскільки $r=2a(1-\cos\varphi)>0$ при $0<\varphi<2\pi$, то за формулою площі сектора в полярній системі координат

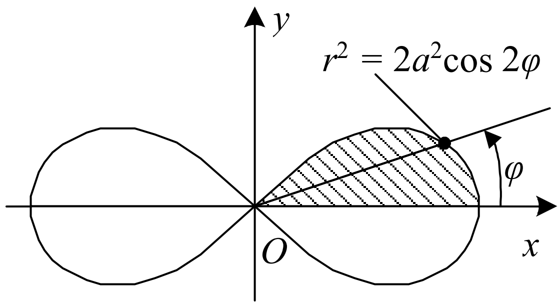
$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)\,d\varphi$$

маємо

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}4a^2(1-\cos\varphi)^2d\varphi=2a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi=$$
$$=2a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)d\varphi=2a^2\left(\varphi-2\sin\varphi+\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{4}\sin2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=6\pi a^2.$$

6.9. Визначити площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі, яка задана рівнянням $r^2=2a^2\cos2\varphi$.

Розв'язання.



Так як $2a^2\cos2\varphi=r^2\geq0$, то Лемніската означена для тих φ із $[0;2\pi]$, де $\cos2\varphi\geq0\Leftrightarrow\varphi\in[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}]$.

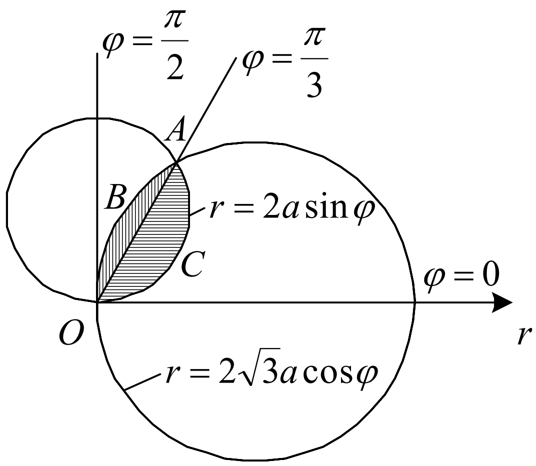
В силу симетрії чверть площі заданої фігури знаходиться в першій координатній чверті, тому

$$\frac{S}{4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2a^2\cos2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot2a^2\cdot\frac{\sin2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{2},$$

а вся площа $S=2a^2$.

6.10. Обчислити площу фігури, обмеженої колами $r = 2\sqrt{3}a\cos\varphi$ та $r = 2a\sin\varphi$.

Розв'язання.



Розв'язавши систему

$$\begin{cases} r = 2\sqrt{3}a\cos\varphi, \\ r = 2a\sin\varphi, \end{cases}$$

знайдемо точку перетину кіл $A\left(\frac{\pi}{3}; a\sqrt{3}\right)$.

Шукана площа S дорівнює сумі площ криволінійних секторів OCA та ABO.

Дуга OCA описується кінцем полярного радіуса r меншого кола при зміні полярного кута φ від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{3}$, тому

$$S_{OCA} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} r^2(\varphi)\,d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi/3} \sin^2\varphi\,d\varphi = a^2\int_0^{\pi/3}(1-\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Дуга ABO описується кінцем полярного радіуса r більшого кола при зміні полярного кута φ від $\varphi = \frac{\pi}{3}$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$, тому

$$S_{ABO} = \frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2} r^2(\varphi)\,d\varphi = 6a^2\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d\varphi = 3a^2\int_{\pi/3}^{\pi/2}(1+\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= 3a^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\pi/3}^{\pi/2} = 3a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Отже, $S = S_{OCA} + S_{ABO} = a^2\left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right)$.

Контрольні запитання і завдання

1. Які фігури називаються рівними між собою?
2. Доведіть властивість монотонності площі, виходячи із властивостей адитивності та невід'ємності.
3. Обґрунтуйте наявність верхньої площі у плоскої фігури.

4. Доведіть, що площа ламаної із скінченною кількістю ланок дорівнює нулю.
5. Доведіть, що перетин двох квадровних фігур є фігура квадровна.
6. Нехай функція $f(x)$ неперервна і недодатна на відрізку $[a; b]$, дайте геометричне тлумачення інтеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.
7. Поясніть наявність знаку модуля у формулі $S = \int\limits_\alpha^\beta \psi(t) \cdot |\varphi'(t)| \cdot dt$ із наслідку 3.

Завдання для роботи в аудиторії.

6.11. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, рівняння яких $y^2 = 2x + 1$ та $x - y - 1 = 0$.

6.12. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$.

6.13. Круг, обмежений колом $x^2 + y^2 = 8$, розділено параболою $y = \frac{x^2}{2}$ на дві частини. Знайти площі обох частин.

6.14. Обчислити площі криволінійних фігур, утворених при перетині еліпса $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ та гіперболи $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

6.15. Обчислити площу, що описується полярним радіусом спіралі Архімеда $r = a\varphi$ при одному її оберті, якщо початку руху відповідає $\varphi = 0$.

6.16. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $r = a \sin 2\varphi$.

6.17. Знайти площу фігури, обмеженої равликом Паскаля $r = 2a(2 + \cos\varphi)$.

6.18. Знайти площу спільної частини фігур, обмежених лініями $r = 3 + \cos 4\varphi$ та $r = 2 - \cos 4\varphi$.

6.19. Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

6.20. Знайти площу петлі лінії $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

6.21. Знайти площу петлі лінії $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

Розрахунково-графічні завдання.

Задача 3.

Обчислити площі фігур, обмежених графіками функцій.

1. $y=(x-2)^3,\ y=4x-8.$
2. $y=x\sqrt{9-x^2},\ y=0\ \ (0\le x\le 3).$
3. $y=4-x^2,\ y=x^2-2x.$
4. $y=\sin x\cos^2 x,\ y=0\ \ (0\le x\le \pi/2).$
5. $y=\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1.$
6. $y=x^2\sqrt{4-x^2},\ y=0,\ (0\le x\le 2).$
7. $y=\cos x\sin^2 x,\ y=0\ (0\le x\le \pi/2).$
8. $y=\sqrt{e^x-1},\ y=0, x=\ln 2.$
9. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\ y=0,\ x=1,\ x=e^3.$
10. $y=\arccos x,\ y=0,\ x=0.$
11. $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1.$
12. $y=2x-x^2+3,\ y=x^2-4x+3.$
13. $y=x\sqrt{36-x^2},\ y=0\ \ (0\le x\le 6).$
14. $x=\arccos y,\ x=0,\ y=0.$
15. $y=x\,\mathrm{arctg}\,x,\ y=0,\ x=\sqrt{3}.$
16. $y=x^2\sqrt{8-x^2},\ y=0\ (0\le x\le 2\sqrt{2}).$
17. $x=\sqrt{e^y-1},\ x=0,\ y=\ln 2.$
18. $y=x\sqrt{4-x^2},\ y=0\ \ (0\le x\le 2).$
19. $y=\dfrac{x}{1+\sqrt{x}},\ y=0,\ x=1.$
20. $y=\dfrac{1}{1+\cos x},\ y=0,\ x=\dfrac{\pi}{2},\ x=-\dfrac{\pi}{2}.$
21. $x=(y-2)^3,\ x=4y-8.$
22. $y=\cos^5 x\sin 2x, y=0\ (0\le x\le \pi/2).$
23. $y=\dfrac{x}{(x^2+1)^2},\ y=0,\ x=1.$
24. $x=4-y^2,\ x=y^2-2y.$
25. $x=\dfrac{1}{y\sqrt{1+\ln y}},\ x=0,\ y=1,\ y=e^3.$

Задача 4.

Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями.

1. $\begin{cases} x=4\sqrt{2}\cos^3 t,\\ y=2\sqrt{2}\sin^3 t,\end{cases}$ $x=2\ \ (x\ge 2).$
2. $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t,\\ y=2\sqrt{2}\sin t,\end{cases}$ $y=2\ \ (y\ge 2).$
3. $\begin{cases} x=4(t-\sin t),\\ y=4(1-\cos t),\end{cases}$ $y=4\ \ (0<x<8\pi,\ y\ge 4).$
4. $\begin{cases} x=16\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t,\end{cases}$ $x=2\ \ (x\ge 2).$
5. $\begin{cases} x=2\cos t,\\ y=6\sin t,\end{cases}$ $y=3\ \ (y\ge 3).$
6. $\begin{cases} x=2(t-\sin t),\\ y=2(1-\cos t),\end{cases}$ $y=3\ \ (0<x<4\pi,\ y\ge 3).$

7. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 6\sqrt{3}\ \ (x \ge 6\sqrt{3})$.

8. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{cases}$ $y = \sqrt{3}\ \ (y \ge \sqrt{3})$.

9. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 3\ \ (0 < x < 6\pi,\ y \ge 3)$.

10. $\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4\ \ (x \ge 4)$.

11. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 3\ \ (y \ge 3)$.

12. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 9\ \ (0 < x < 12\pi,\ y \ge 9)$.

13. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$ $x = 4\ \ (x \ge 4)$.

14. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$ $y = 4\ \ (y \ge 4)$.

15. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 6\ \ (0 < x < 12\pi,\ y \ge 6)$.

16. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3}\ \ (x \ge 3\sqrt{3})$.

17. $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3}\ \ (y \ge 2\sqrt{3})$.

18. $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 15\ \ (0 < x < 20\pi,\ y \ge 15)$.

19. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1\ \ (x \ge 1)$.

20. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$ $y = 4\ \ (y \ge 4)$.

21. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ $y = 1\ \ (0 < x < 2\pi,\ y \ge 1)$.

22. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 1\ \ (x \ge 1)$.

23. $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $y = 2\ \ (y \ge 2)$.

24. $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$ $y = 12\ \ (0 < x < 16\pi,\ y \ge 12)$.

25. $\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ $x = 9\sqrt{3}\ \ (x \ge 9\sqrt{3})$.

Задача 5.

Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями в полярних координатах.

1. $r = 4\cos 3\varphi,\ r = 2\ \ (r \ge 2)$.
2. $r = \cos 2\varphi$.
3. $r = \sqrt{3}\cos\varphi,\ r = \sin\varphi\ \ (0 \le \varphi \le \pi/2)$.
4. $r = 4\sin 3\varphi,\ r = 2\ \ (r \ge 2)$.
5. $r = 2\cos\varphi,\ r = 2\sqrt{3}\sin\varphi\ \ (0 \le \varphi \le \pi/2)$.
6. $r = \sin 3\varphi$.
7. $r = 6\sin 3\varphi,\ r = 3\ \ (r \ge 3)$.
8. $r = \cos 3\varphi$.
9. $r = \cos\varphi,\ r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4)\ \ (-\pi/4 \le \varphi \le \pi/2)$.

10. $r = \sin\varphi,\ r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4)\ \ (0 \le \varphi \le 3\pi/4).$

11. $r = 6\cos 3\varphi,\ r = 3\ \ (r \ge 3).$

12. $r = 1/2 + \sin\varphi.$

13. $r = \cos\varphi,\ r = \sin\varphi\ \ (0 \le \varphi \le \pi/2).$

14. $r = \cos\varphi + \sin\varphi.$

15. $r = \sqrt{2}\cos(\varphi - \pi/4),\ r = \sqrt{2}\sin(\varphi - \pi/4)\ \ (\pi/4 \le \varphi \le 3\pi/4).$

16. $r = \cos\varphi,\ r = 2\cos\varphi.$

17. $r = \sin\varphi,\ r = 2\sin\varphi.$

18. $r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi.$

19. $r = 1/2 + \cos\varphi.$

20. $r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi.$

21. $r = (5/2)\sin\varphi,\ r = (3/2)\sin\varphi.$

22. $r = (3/2)\cos\varphi,\ r = (5/2)\cos\varphi.$

23. $r = 4\cos 4\varphi.$

24. $r = \sin 6\varphi.$

25. $r = 2\cos\varphi,\ r = 3\cos\varphi.$

§7. ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ

Основні поняття і теореми

[1, с. 273-274, с. 405-406; 2, с. 265-273; 3, с. 405-409]

1. Довжина явно заданої дуги кривої.

Нехай функція $f(x)$ має на відрізку $[a; b]$ неперервну похідну $f'(x)$. Тоді графік функції

$$L: \begin{cases} y = f(x), \\ a \le x \le b, \end{cases}$$

називається явно заданою гладкою кривою.

Розглянемо систему точок $M_k(x_k; y_k)$ на кривій L, де

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Сполучивши послідовно точки $\{M_k\}$, отримаємо ламану $L_n = M_0M_1M_2\ldots M_{n-1}M_n$ вписану в дугу L. Позначимо периметр цієї ламаної через $l_n =$ дов(L_n). Нехай $d = \max\limits_k \Delta x_k$ – діаметр поділу $\{x_k\}$ відрізка $[a; b]$.

Означення. Якщо існує

$$\lim_{d \to 0} \text{дов}(L_n) = l,$$

яка не залежить від способу вписування ламаних L_n, то дуга L називається *спрямлюваною* або такою, що *має довжину*. При цьому число $l \equiv$ дов(L) називається *довжиною* дуги L.

Геометричне тлумачення довжини дуги. Довжина нескінченно малої гладкої дуги вважається рівною довжині хорди, що стягує цю дугу, тобто

$$\Delta l_k = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}, \ \Delta x_k \to 0.$$

Цей факт означає, що елементи довжини дуги можна записати наступним чином

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot dx.$$

***Теорема* 1.** Довжина явно заданої гладкої дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

2. Довжина дуги, заданої параметрично.

Наступне означення є найбільш загальним поняттям гладкої дуги.

Якщо в рівнянні кривої заданої параметрично

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta,$$

функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ мають неперервні похідні і $(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2 > 0$, то крива L називається гладкою.

Зауваження. Якщо $t \equiv x$, то параметричне задання кривої є явним: $y = \psi(x)$, $\alpha \le x \le \beta$.

Гладку криву L можна розглядати як траєкторію руху матеріальної точки в часі:

$$\vec{r}(t) = \varphi(t) \cdot \vec{i} + \psi(t) \cdot \vec{j},\ t \in [\alpha; \beta].$$

Для вектора швидкості руху точки по дузі маємо вираз

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \varphi'(t) \cdot \vec{i} + \psi'(t) \cdot \vec{j}.$$

Фізичне тлумачення довжини дуги.

Елемент довжини дуги траєкторії руху точки дорівнює добутку величини вектора швидкості на елемент часу:

$$dl = |\vec{V}(t)|\, dt = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \cdot dt.$$

***Теорема* 2.** Довжина параметрично заданої гладкої дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2}\, dt.$$

Наслідок 1. Нехай гладка крива L задана у просторі системою рівнянь

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t),\ \alpha \le t \le \beta, \\ z = \eta(t), \end{cases}$$

тоді довжина дуги кривої

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'_t)^2 + (\psi'_t)^2 + (\eta'_t)^2}\, dt.$$

Зауваження. Якщо розглянути полярну систему координат $(\varphi; \rho)$, зв'язану з декартовою системою $(x; y)$ рівняннями

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \ \text{ і } \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

то крива $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, в декартовій системі координат задається за допомогою параметра-кута $t \equiv \varphi$ таким чином:

$$L: \begin{cases} x = \rho(\varphi) \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi) \cdot \sin\varphi, \end{cases} \alpha \le \varphi \le \beta.$$

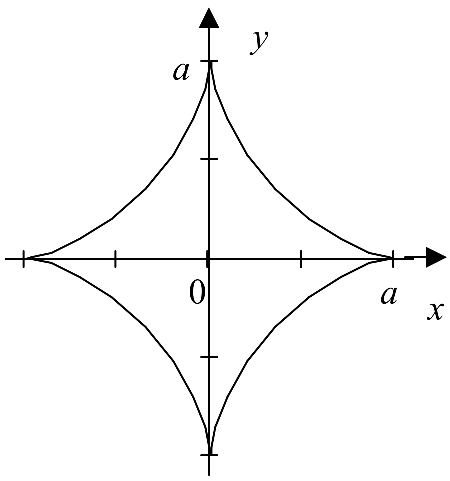
Наслідок 2. Якщо в полярній системі координат гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то довжина її дуги обчислюється за формулою

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Приклади розв'язування задач.

7.1. Обчислити всю довжину астроїди, що визначається рівнянням $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання.



Скористаємося формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx .$$

Знайдемо y з рівняння астроїди. $y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$; піднесемо обидві частини цієї рівності до степеня $\frac{3}{2}$. Отримаємо

$$y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}; \qquad y' = -x^{-\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + x^{-\frac{2}{3}}\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)} = a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}}.$$

Тоді маємо

$$\frac{L}{4} = \int_0^a a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{1}{3}} dx = a^{\frac{1}{3}} \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_0^a = \frac{3}{2}a; \; L = 6a.$$

7.2. Знайти довжину кардіоїди, що визначається рівняннями:
$\begin{cases} x = 2R\cos t - R\cos 2t, \\ y = 2R\sin t - R\sin 2t, \end{cases} \; 0 \le t \le 2\pi.$

Розв'язання.

Скористаємося формулою

$$L = \int_\alpha^\beta |\,\vec{v}(t)\,|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt, \text{ де } \vec{v}(t) = (x_t'; y_t').$$

Обчислимо похідні $x' = -2R\sin t + 2R\cos 2t, \; y' = 2R\cos t - 2R\cos 2t.$

Тоді

$$x'^2 + y'^2 = 4R^2\sin^2 t - 8R^2 \sin t \sin 2t + 4R^2 \sin^2 2t +$$

$$+4R^2\cos^2 t - 8R^2\cos t\cos 2t + 4R^2\cos^2 2t =$$

$$= 4R^2(1 - 2\sin t \sin 2t - 2\cos t \cos 2t + 1) =$$

$$= 8R^2\left(1 - 2\sin^2 t \cos t - \cos^3 t + \cos t \sin^2 t\right) = 8R^2(1 - \cos t) = 16R^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

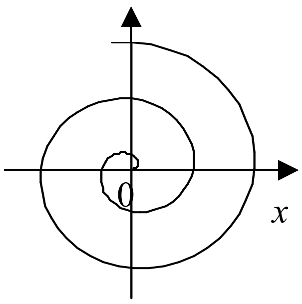
Отже отримаємо

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{16R^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 4R \int_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 4R \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt =$$

$$= -8R \cos \frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = -8R(-1-1) = 16R.$$

7.3. Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $r = a\varphi$ від початку координат до довільної точки $P(r, \varphi)$.

Розв'язання.



Скористаємося формулою

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$$

Обчислимо $\sqrt{r^2 + r'^2}$. З того, що $r = a\varphi$ слідує, що

$$r' = a;\ r^2 + r'^2 = a^2\varphi^2 + a^2 = a^2(1 + \varphi^2);$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = a\sqrt{1 + \varphi^2}.$$

Тому

$$L = a\int_0^\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})\right)\Bigg|_0^\varphi =$$

$$= \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1 + \varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})\right).$$

Контрольні запитання і завдання

1. Як називають криву, що має дотичну в кожній своїй точці?
2. Виходячи із формули $l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$ отримайте похідну від довжини дуги по абсцисі.
3. Який взаємозв'язок між формулами із теореми 1 і теореми 2?
4. Обґрунтуйте незалежність довжини дуги від закону параметризації кривої.
5. Нехай L просторова параметрично задана дуга. Дайте означення правильно вписаної ламаної в дугу L.
6. Доведіть, що площа спрямлюваної дуги дорівнює нулю.

7. Нехай $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ неперервні і мають на відрізку $[\alpha;\beta]$ обмежені перші похідні. Покажіть, що крива $L:\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$, є спрямлюваною і її довжина $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi_t')^2+(\psi_t')^2}\,dt.$

Завдання для роботи в аудиторії.

7.4. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y=a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{2}$ (від $x_1=0$ до $x_2=b$).

7.5. Знайти довжину дуги лінії $y=\ln x$ (від $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$).

7.6. Знайти довжину дуги лінії $y=\ln(1-x^2)$ (від $x_1=0$ до $x_2=\dfrac{1}{2}$).

7.7. Знайти довжину лінії $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

7.8. На циклоїді $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ знайти точку, яка ділить першу арку циклоїди по довжині у відношенні $1:3$.

7.9. Знайти довжину лінії $\begin{cases} x=a\cos^5 t, \\ y=a\sin^5 t. \end{cases}$.

7.10. Знайти довжину дуги трактриси $\begin{cases} x=a\left(\cos t+\ln\mathrm{tg}\dfrac{t}{2}\right), \\ y=a\sin t \end{cases}$ від її точки $(0,a)$ до її точки (x,y).

7.11. Знайти довжину дуги евольвенти кола $\begin{cases} x=R(\cos t+t\sin t), \\ y=R(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ (від $t_1=0$ до $t_2=\pi$).

7.12. Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $r\varphi=1$ (від $\varphi_1=\dfrac{3}{4}$ до $\varphi_2=\dfrac{4}{3}$).

7.13. Знайти довжину логарифмічної спіралі $r=a^{\varphi}$ ($a>0, a\ne 1$) між точками (r_0,φ_0) і (r_1,φ_1).

7.14. Знайти довжину дуги цисоїди Діоклеса $r=2a\sin^2\varphi/\cos\varphi$ від точки (r_0,φ_0) до точки (r_1,φ_1).

Розрахунково-графічні завдання.

Задача 6.
Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями в прямокутній системі координат.

1. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}.$
2. $y=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{\ln x}{2},\ 1\le x\le 2.$
3. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x,\ 0\le x\le 7/9.$
4. $y=\ln\dfrac{5}{2x},\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$
5. $y=\arcsin x-\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le\dfrac{15}{16}.$
6. $y=e^x+6,\ \ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}.$
7. $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},1/4\le x\le 1.$
8. $y=\ln(x^2-1),\ 2\le x\le 3.$
9. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,\ 0\le x\le 8/9.$
10. $y=\ln(1-x^2),\ 0\le x\le 1/4.$
11. $y=2+\operatorname{ch}x,\ 0\le x\le 1.$
12. $y=1-\ln\cos x,\ 0\le x\le\pi/6.$
13. $y=e^x+13,\ \ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}.$
14. $y=\ln\cos x+2,\ 0\le x\le\pi/6.$
15. $y=2-e^x,\ \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}.$
16. $y=-\ln\cos x,\ 0\le x\le\pi/6.$
17. $y=1-\ln\sin x,\ \pi/3\le x\le\pi/2.$
18. $y=1-\ln(x^2-1),\ 3\le x\le 4.$
19. $y=-\arccos\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},0\le x\le 1/4.$
20. $y=\operatorname{ch}x+3,\ 0\le x\le 1.$
21. $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x}+5,\ 1/9\le x\le 1.$
22. $y=\ln\sin x,\ \pi/3\le x\le\pi/2.$
23. $y=-\arccos x+\sqrt{1-x^2}+1,\ 0\le x\le 9/16.$
24. $y=\ln 7-\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$
25. $y=1+\arcsin x-\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 3/4.$

Задача 7.
Обчислити довжини дуг кривих, заданих параметричними рівняннями.

1. $\begin{cases}x=5(t-\sin t),\\ y=5(1-\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le\pi.$

2. $\begin{cases}x=3(2\cos t-\cos 2t),\\ y=3(2\sin t-\sin 2t),\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi.$

3. $\begin{cases}x=4(\cos t+t\sin t),\\ y=4(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\le t\le 2.$

4. $\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t,\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t,\end{cases}$ $0\le t\le\pi.$

5. $\begin{cases}x=10\cos^3 t,\\ y=10\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le\pi/2.$

6. $\begin{cases}x=e^t(\cos t+\sin t),\\ y=e^t(\cos t-\sin t),\end{cases}$ $0\le t\le\pi.$

7. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi \le t \le 2\pi.$

8. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{1}{4}\sin t, \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

9. $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3.$

10. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3.$

11. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3.$

12. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le \pi.$

13. $\begin{cases} x = 2{,}5(t - \sin t), \\ y = 2{,}5(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le \pi.$

14. $\begin{cases} x = 3{,}5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3{,}5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

15. $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi.$

16. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

17. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/6.$

18. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

19. $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$
$\pi/2 \le t \le 2\pi/3.$

20. $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/3.$

21. $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/4.$

22. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$
$0 \le t \le 2\pi.$

23. $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$
$\pi/6 \le t \le \pi/4.$

24. $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$
$0 \le t \le 3\pi/2.$

25. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$
$0 \le t \le \pi/2.$

Задача 8.

Обчислити довжини дуг кривих, заданих рівняннями в полярних координатах.

1. $r = 3e^{3\varphi/4}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
2. $r = 2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
3. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
4. $r = 5e^{5\varphi/12}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
5. $r = 6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$.
6. $r = 3e^{3\varphi/4}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.
7. $r = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.
8. $r = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.
9. $r = 5e^{5\varphi/12}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.
10. $r = 12e^{12\varphi/5}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$.
11. $r = 1 - \sin\varphi$, $-\pi/2 \le \varphi \le -\pi/6$.
12. $r = 2(1 - \cos\varphi)$, $-\pi \le \varphi \le -\pi/2$.
13. $r = 3(1 + \sin\varphi)$, $-\pi/6 \le \varphi \le 0$.
14. $r = 4(1 - \sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/6$.
15. $r = 5(1 - \cos\varphi)$, $-\pi/3 \le \varphi \le 0$.
16. $r = 6(1 + \sin\varphi)$, $-\pi/2 \le \varphi \le 0$.
17. $r = 7(1 - \sin\varphi)$, $-\pi/6 \le \varphi \le \pi/6$.
18. $r = 8(1 - \cos\varphi)$, $-2\pi/3 \le \varphi \le 0$.
19. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 3/4$.
20. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 4/3$.
21. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 5/12$.
22. $r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 12/5$.
23. $r = 4\varphi$, $0 \le \varphi \le 3/4$.
24. $r = 3\varphi$, $0 \le \varphi \le 4/3$.
25. $r = 5\varphi$, $0 \le \varphi \le 12/5$.

§8. ОБЧИСЛЕННЯ ОБ'ЄМУ І ПОВЕРХНІ ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Основні поняття і теореми

[1, с. 406-409; 2, с. 264-265, с. 277-279; 3, с. 409-412]

Обмежену множину точок простору називають <u>*тілом*</u>. Вважаємо відомими зі школи поняття многогранного тіла та його об'єму. Відзначимо, що цей об'єм володіє властивостями адитивності, інваріантності та монотонності.

Розглянемо довільне тіло T, а також всі можливі многогранні тіла $P \subset T$ розташовані в ньому та всі многогранні тіла $Q \supset T$, що містять його.

Нижнім об'ємом тіла T називають число $V_* = \sup\limits_{P \subset T} \text{об}(P)$.

Верхнім об'ємом тіла T називають число $V^* = \inf\limits_{Q \supset T} \text{об}(Q)$.

Означення. Тіло T називається <u>*кубовним*</u> або таким, що <u>*має об'єм*</u>, якщо $V_* = V^*$. При цьому число $V_* = V^* = \text{об}(T)$ називається об'ємом тіла T.

Просторове тіло T будемо називати <u>*циліндричним*</u>, якщо воно обмежене циліндричною поверхнею і двома паралельними площинами, перпендикулярними до поверхні циліндра.

Твердження. Якщо основа циліндричного тіла T має площу $S_{\text{осн}}$, то саме тіло має об'єм, який обчислюється за формулою об$(T) = S_{\text{осн}} \cdot H$, де H – висота циліндра.

<u>*Східчастим тілом*</u> називають об'єднання скінченного числа циліндричних тіл $\{T_k\}$ розташованих так, що верхня основа кожного попереднього із цих циліндрів знаходиться в одній площині з нижньою основою наступного.

Об'єм східчастого тіла T існує, причому

$$\text{об}(T) = \sum_{k=1}^{n} \text{об}(T_k).$$

За допомогою методу наближення східчастими тілами формулу обчислення об'єму можна поширити на тіла довільної структури.

Як приклад, розглянемо тіла, правильні вздовж деякої осі.

Означення. Тіло T називається <u>*правильним вздовж осі*</u> Ox, якщо виконано наступні три умови:

1) пр$_{Ox}(T) = [a; b]$ – проекція тіла T на вісь Ox є відрізок $[a; b]$;
2) перерізи цього тіла площинами, перпендикулярними до осі Ox є квадровні фігури з площами $S(x)$, $a \le x \le b$;
3) функція $S = S(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$.

Теорема 1. Тіло T правильне вздовж осі Ox має об'єм, який можна обчислити за площами паралельних перерізів

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Наслідок 1. Тіло, що утворене при обертанні навколо осі Ox криволінійної трапеції неперервної функції $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, має об'єм, який обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$

Наслідок 2. Нехай $y = f(x)$ монотонна функція на відрізку $[a; b]$, а $x = g(x)$ обернена до неї на $y \in [c; d]$. Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції $\{0 \le x \le g(y), c \le y \le d\}$ обчислюється за формулами

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy = \pi \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx.$$

***Теорема* 2.** Якщо поверхня утворена при обертанні навколо осі Ox гладкої дуги графіка $y = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$, то площа цієї поверхні обертання обчислюється за формулою

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

***Теорема* 3.** Якщо поверхня утворена при обертанні навколо осі Ox параметрично заданої гладкої дуги: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то площа поверхні обертання

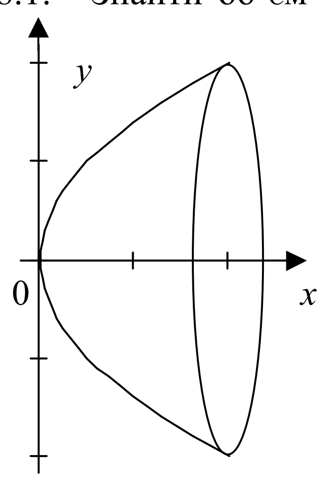
$$Q = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t) \cdot \sqrt{(\varphi_t')^2 + (\psi_t')^2}\, dt,$$

а об'єм тіла обертання

$$V = \pi \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \cdot |\varphi'(t)|\, dt.$$

Приклади розв'язування задач.

8.1. Знайти об'єм та бічну поверхню параболоїда, утвореного обертанням параболи $y^2 = 2px$ навколо осі Ox та обмеженого площиною $x = H$.



Розв'язання.

Об'єм тіла обчислимо за формулою:

$$V = \pi \int_0^H y^2 dx = \pi \int_0^H 2px\, dx = 2p\pi \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^H = \pi p H^2.$$

Бічна поверхня визначається за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx.$$

Знайдемо спочатку корінь $\sqrt{1 + y'^2}$, що входить в цю формулу. Якщо $y^2 = 2px$, то $y' = \frac{p}{y}$, $y'^2 = \frac{p^2}{y^2} = \frac{p^2}{2px} = \frac{p}{2x}$; $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}$.

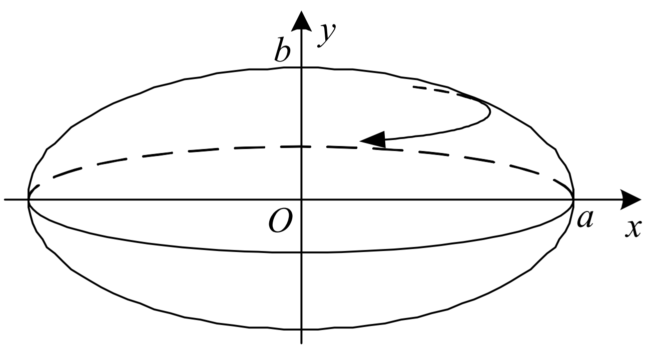
Так як $y^2 = 2px$, то $y = \sqrt{2px}$. Отже знаходимо

$$S = 2\pi \int_0^H \sqrt{2px} \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\, dx = 2\pi \int_0^H \sqrt{2px + p^2}\, dx = \frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left(x + \frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{4\pi\sqrt{2p}}{3}\left(\left(H + \frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

8.2. Знайти об’єм і поверхню тіла, що утворюється при обертанні еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ навколо осі Oy.

Розв’язання.



Для $x \geq 0$ з рівняння еліпса маємо $x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$. Обчислимо об’єм цього тіла (еліпсоїд обертання) за формулою

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy.$$

Враховуючи симетрію еліпса відносно осі Ox маємо

$$V = 2\pi a^2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2\pi a^2 \left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_0^b = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Поверхню тіла обертання обчислимо за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b x(y)\sqrt{1 + \left(x'(y)\right)^2}\, dy.$$

Оскільки $x'(y)=\left(a\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}\right)'=a\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{y^2}{b^2}}}\cdot\left(-\dfrac{2y}{b^2}\right)=-\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{y/b}{\sqrt{1-(y/b)^2}}$, то

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^b a\sqrt{1-(y/b)^2}\sqrt{1+\left(-\frac{a}{b}\cdot\frac{y/b}{\sqrt{1-(y/b)^2}}\right)^2}\,dy=$$

$$=4\pi ab\int_0^b\sqrt{1-(y/b)^2+\frac{a^2}{b^2}\cdot(y/b)^2}\;d\frac{y}{b}.$$

Введемо заміну $\dfrac{y}{b}=z$, $d\dfrac{y}{b}=dz$, $z_1=0$, $z_2=1$.

$$S=4\pi ab\int_0^1\sqrt{1-z^2+\frac{a^2}{b^2}\cdot z^2}\,dz=4\pi ab\frac{1}{b}\int_0^1\sqrt{b^2-b^2z^2+a^2z^2}\,dz=$$

$$=4\pi a\sqrt{a^2-b^2}\int_0^1\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}+z^2}\,dz=$$

$$=2\pi a\sqrt{a^2-b^2}\left(z\sqrt{z^2+\frac{b^2}{a^2-b^2}}+\frac{b^2}{a^2-b^2}\ln\left(z+\sqrt{z^2+\frac{b^2}{a^2-b^2}}\right)\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=2\pi a\sqrt{a^2-b^2}\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2-b^2}}+\frac{b^2}{a^2-b^2}\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2-b^2}}\right)-\ln\sqrt{\frac{b^2}{a^2-b^2}}\right)=$$

$$=2\pi a^2+\frac{2\pi ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}.$$

8.3. Знайти об’єм і поверхню тіла, що утворюється при обертанні однієї арки циклоїди $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ навколо осі Ox.

Розв’язання.

У випадку, коли крива задана параметричними рівняннями об’єм тіла обертання визначається за формулою

$$V=\pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\cdot x'(t)dt.$$

Тому $V=\pi\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(a(1-\cos t)\right)^2\left(a(t-\sin t)\right)'dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\, dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - \frac{1}{4}(\cos t + \cos 3t) \right) dt = \pi a^3 \cdot 5\pi = 5\pi^2 a^3.$$

Поверхню тіла обертання знайдемо за формулою

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt .$$

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2 (t - \sin t)'^2 + a^2 (1 - \cos t)'^2}\; dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\; dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2(1 - \cos t)}\; dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2\sin^2 \frac{t}{2} \sqrt{4\sin^2 \frac{t}{2}}\; dt =$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(3\sin\frac{t}{2} - \sin\frac{3t}{2} \right) dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Контрольні запитання і завдання

1. Дайте означення $\sup G$ – точної верхньої межі множини G та $\inf G$ – точної нижньої межі множини G із R^1.
2. Яку фігуру називають основою циліндричного тіла? Що таке висота циліндричного тіла?
3. Доведіть властивості адитивності та монотонності для об'єму довільного просторового тіла.
4. Доведіть, що тіло T має об'єм тоді і тільки тоді, коли його межа має нульовий об'єм: об$(\partial T) = 0$.
5. Доведіть формулу для об'єму тіла обертання із наслідку 2.
6. Нехай r і R – радіуси основ зрізаного кругового конуса, а l – довжина твірної. Доведіть, що площа бічної поверхні зрізаного конуса обчислюється за формулою $S_{\text{біч}} = \pi(r + R)\cdot l$.
7. Доведіть, що площа поверхні утвореної при обертанні навколо полярної осі гладкої дуги $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$, обчислюється за формулою $Q = 2\pi \int_\alpha^\beta \rho(\varphi) \cdot \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi$.

Завдання для роботи в аудиторії.

8.4. Еліпс, велика вісь якого дорівнює $2a$, мала – $2b$, обертається: 1) навколо великої осі, 2) навколо малої осі. Знайти об'єм еліпсоїдів обертання, що утворилися. В частинному випадку отримати об'єм кулі.

8.5. Симетричний параболічний сегмент, основа якого a, а висота h, обертається навколо основи. Обчислити об'єм тіла обертання, яке при цьому утворюється ("лимон" Кавальєрі).

8.6. Фігура, обмежена гіперболою $x^2 - y^2 = a^2$ та прямою $x = a + h\,(h > 0)$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла обертання.

8.7. Криволінійна трапеція, обмежена лінією $y = xe^x$ та прямими $x = 1$ і $y = 0$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

8.8. Фігура, обмежена дугами парабол $y = x^2$ та $y^2 = x$, обертається навколо осі ординат. Обчислити об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

8.9. Знайти об'єм тіла, отриманого при обертанні астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ навколо осі ординат.

8.10. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2 = 4ax$ навколо осі абсцис від вершини до точки з абсцисою $x = 3a$.

8.11. Обчислити площу катеноїда – поверхні, утвореною обертанням ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{2}$ навколо осі абсцис (від $x_1 = 0$ до $x_2 = a$).

8.12. Обчислити площу поверхні веретеноподібної поверхні, утвореної обертанням однієї арки синусоїди $y = \sin x$ навколо осі абсцис.

8.13. Дуга кола $x^2 + y^2 = a^2$, що лежить в першому квадранті, обертається навколо хорди, що її стягує. Обчислити площу поверхні, що при цьому утворюється.

8.14. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі абсцис дуги лінії $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

8.15. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ навколо осі абсцис.

Розрахунково-графічні завдання.

Задача 9.

Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігур, обмежених графіками функцій. У варіантах 1-13 вісь обертання Ox, у варіантах 14-25 вісь обертання Oy.

1. $y=-x^2+5x-6,\ y=0.$
2. $2x-x^2-y=0,\ 2x^2-4x+y=0.$
3. $y=3\sin x,\ y=\sin x,\ 0\le x\le \pi.$
4. $y=5\cos x,\ y=\cos x,\ x=0,\ x\ge 0.$
5. $y=\sin^2 x,\ x=\pi/2,\ y=0.$
6. $x=\sqrt[3]{y-2},\ x=1,\ y=1.$
7. $y=xe^x,\ y=0,\ x=1.$
8. $y=2x-x^2,\ y=-x+2,\ x=0.$
9. $y=2x-x^2,\ y=-x+2.$
10. $y=e^{1-x},\ y=0,\ x=0,\ x=1.$
11. $y=x^2,\ y^2-x=0.$
12. $x^2+(y-2)^2=1.$
13. $y=1-x^2,\ x=0, x=\sqrt{y-2},\ x=1.$
14. $y=\arccos(x/3),\ y=\arccos x,\ y=0.$
15. $y=\arcsin(x/5),\ y=\arcsin x,\ y=\pi/2.$
16. $y=x^2,\ x=2,\ y=0.$
17. $y=x^2+1,\ y=x,\ x=0,\ x=1.$
18. $y=\sqrt{x-1},\ y=0,\ y=1,\ x=0{,}5.$
19. $y=\ln x,\ x=2,\ y=0.$
20. $y=(x-1)^2,\ y=1.$
21. $y^2=x-2,\ y=0,\ y=x^3,\ y=1.$
22. $y=x^3,\ y=x^2.$
23. $y=\arccos\dfrac{x}{5},\ y=\arccos\dfrac{x}{3},\ y=0.$
24. $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=0.$
25. $y=x^2-2x+1,\ x=2,\ y=0.$

§9. ОБЧИСЛЕННЯ МОМЕНТІВ, КООРДИНАТ ЦЕНТРА ВАГИ, ТЕОРЕМИ ГУЛЬДІНА

Основні поняття і теореми

[3, с. 414-416; 4, с. 461-464]

Нехай $P(x; y)$ – матеріальна точка маси m на координатній площині Oxy. Добутки $m\cdot y$ і $m\cdot x$ називаються *статичними моментами маси* m відносно осей Ox і Oy.

Координати P_c – центра мас системи матеріальних точок $P_k(x_k; y_k)$ з масами m_k, $k=\overline{1,n}$ визначаються за формулами

$$x_c=\frac{x_1\cdot m_1+...+x_n\cdot m_n}{m_1+...+m_n},\ y_c=\frac{y_1\cdot m_1+...+y_n\cdot m_n}{m_1+...+m_n}.$$

Центр мас плоскої лінії.

Нехай L однорідна спрямлювана крива, тобто крива L має масу, яка прямо пропорційна довжині дуги:

$$dm=\gamma\cdot dl,$$

де dm – маса елемента дуги dl, а γ – деяка стала лінійна густина кривої L.

Координати центра мас явно заданої гладкої дуги L: $y=f(x)$, $a\le x\le b$, обчислюються за формулами:

$$x_c=\frac{\int\limits_a^b x\cdot\gamma\cdot dl}{\gamma\int\limits_a^b dl}=\frac{\int\limits_a^b x\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx},$$

$$y_c=\frac{\int\limits_a^b f(x)\cdot\gamma\cdot dl}{\gamma\int\limits_a^b dl}=\frac{\int\limits_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}.$$

Нагадаємо, що площа поверхні утвореної при обертанні графіка $y=f(x)$, $a\le x\le b$, навколо осі Ox дорівнює

$$Q=2\pi\int\limits_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Із формули для ординати y_c центра мас виводимо

$$y_c=\frac{Q}{2\pi l}\ \text{або}\ Q=l\cdot 2\pi y_c.$$

Остання рівність і становить, по суті першу теорему швейцарського математика Гульдіна П. (1577–1643).

Перша теорема Гульдіна. Площа поверхні обертання плоскої кривої навколо осі, що не перетинає криву і лежить в її площині, дорівнює добутку довжини кривої і довжини кола, яке описує при обертанні центр мас кривої.

Центр мас плоскої фігури.

Нехай задано матеріальну плоску фігуру з постійною поверхневою густиною, тобто маса одиниці площі її поверхні стала величина γ для всіх частин фігури.

Якщо фігура обмежена лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, то координати центра мас обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}{\int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx}{\int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx}.$$

Корисним при розв’язуванні задач є такий факт.

Твердження. Якщо фігура (крива) має вісь симетрії, то центр ваги лежить на цій осі.

Розглянемо криволінійний прямокутник

$$\Pi = \left\{(x; y) \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le f_1(x) \le y \le f_2(x), \\ a \le x \le b \end{matrix}\right\},$$

його площа $S = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$, а об’єм тіла обертання навколо осі Ox прямокутника Π дорівнює

$$V = \pi\int\limits_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx.$$

Із формули для ординати центра мас плоскої фігури маємо

$$2\pi \cdot y_c \cdot S = V.$$

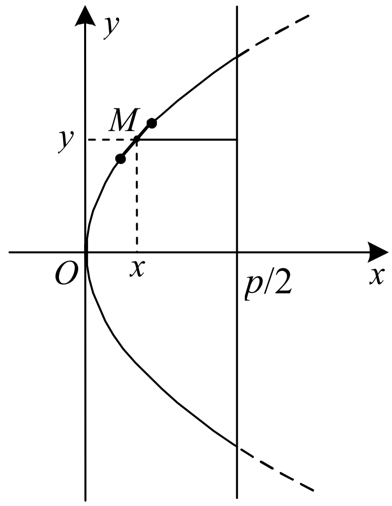
Друга теорема Гульдіна. Об’єм тіла обертання плоскої фігури навколо осі, що не перетинає фігуру і лежить в її площині, дорівнює добутку площі цієї фігури та довжини кола, яке описує при обертанні центр мас фігури.

Приклади розв’язування задач.

9.1. Знайти статичний момент дуги параболи $y^2 = 2px$ $\left(0 \le x \le \dfrac{p}{2}\right)$ відносно прямої $x = \dfrac{p}{2}$.

Розв’язання.

Оскільки $y = \pm\sqrt{2p} \cdot \sqrt{x}$, то



$$y' = \pm\sqrt{2p}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \pm\sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Нехай x – абсциса точки $M(x, y)$, що лежить на дузі $\overset{\smile}{dl}$; тоді (з точністю до нескінченно малої більш високого порядку малості, ніж dx)

$$dM_{\frac{p}{2}} = \left(\frac{p}{2} - x\right)dl = \left(\frac{p}{2} - x\right)\sqrt{1 + y'^2}\,dx =$$

$$= \left(\frac{p}{2} - x\right)\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx.$$

Враховуючи симетрію кривої відносно осі Ox, маємо

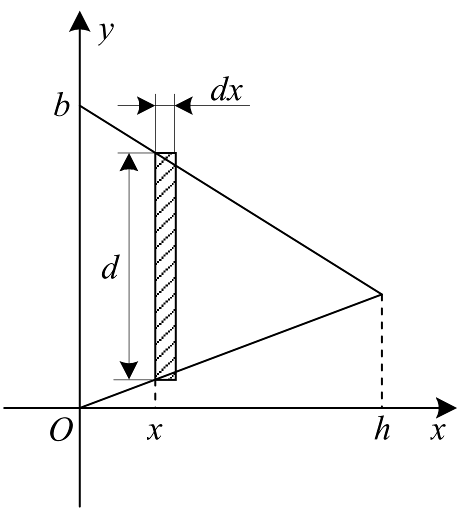
$$M_{\frac{p}{2}} = 2\int_0^{\frac{p}{2}}\left(\frac{p}{2} - x\right)\sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,dx = \int_0^{\frac{p}{2}}(p - (\sqrt{2x})^2)\sqrt{p + (\sqrt{2x})^2}\,d(\sqrt{2x}) =$$

$$= \int_0^{\sqrt{p}}(p - z^2)\sqrt{p + z^2}\,dz =$$

$$= \left(\frac{z}{4}\sqrt{p + z^2}\left(\frac{5p}{2} - (p + z^2)\right) + \frac{5}{8}p^2\ln(z + \sqrt{p + z^2})\right)\Bigg|_0^{\sqrt{p}} = \frac{p^2}{8}(\sqrt{2} + 5\ln(1 + \sqrt{2})).$$

9.2. Знайти статичний момент і момент інерції однорідної трикутної пластинки з основою b і висотою h відносно основи.

Розв'язання.



Відрізок, кінці якого лежать на бічних сторонах трикутника, паралельних основі, що проходить на відстані x $(0 < x < h)$ від нього, має довжину $d = b\left(1 - \frac{x}{h}\right)$. Розглянемо тепер горизонтальну смужку шириною dx, паралельну основі трикутника, прийнявши її наближено за прямокутник зі сторонами довжини d та dx. З точністю до нескінченно малих більш високого порядку ніж dx, отримаємо, що площа смужки дорівнює величині $b\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx$, а статичний момент і момент інерції смужки відносно основи трикутника дорівнюють, відповідно,

$$dM = bx\left(1-\frac{x}{h}\right)dx;\ dI = bx^2\left(1-\frac{x}{h}\right)dx.$$

Отримуємо

$$M = b\int_0^h x\left(1-\frac{x}{h}\right)dx = b\int_0^h\left(x-\frac{x^2}{h}\right)dx = b\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3h}\right)\Bigg|_0^h = b\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3h}\right) = \frac{bh^2}{6},$$

$$I = b\int_0^h x^2\left(1-\frac{x}{h}\right)dx = b\int_0^h\left(x^2-\frac{x^3}{h}\right)dx = b\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h = b\left(\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4h}\right) = \frac{bh^3}{12}.$$

9.3. Визначити координати центра мас кругової дуги $\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = a\sin\varphi, \end{cases}$

$-\alpha \le \varphi \le \alpha$, де $0 < \alpha < \pi$.

Розв'язання.

Дуга симетрична відносно осі Ox, тому центр мас дуги знаходиться на цій осі. Обчислимо довжину кривої та статичний момент відносно осі Oy. Оскільки

$$\begin{cases} dL = ad\varphi, \\ dM_y = a\cos\varphi\cdot ad\varphi, \end{cases}$$

то

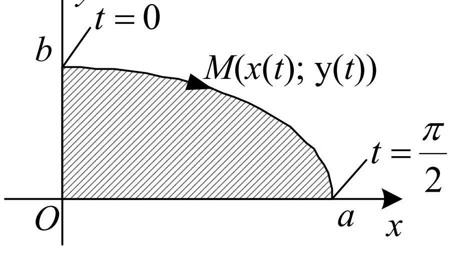
$$L = a\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi;\ M_y = a^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi\, d\varphi = 2a^2\sin\alpha.$$

Знайдемо координату x_C центра ваги: $x_C = \dfrac{M_y}{L} = a\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$. Таким чином, $C(x_C, y_C) = \left(a\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}, 0\right)$.

9.4. Визначити координати центра мас фігури

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1\ \ (0 \le x \le a, 0 \le y \le b).$$

Розв'язання.



Рівняння четвертої частини еліпса запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x = a\sin t, \\ y = b\cos t, \end{cases}\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(t)\,dx(t) = \frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,d\sin t = \frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)\,d\sin t =$$

$$= \frac{ab^2}{2}\left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab^2}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{ab^2}{3};$$

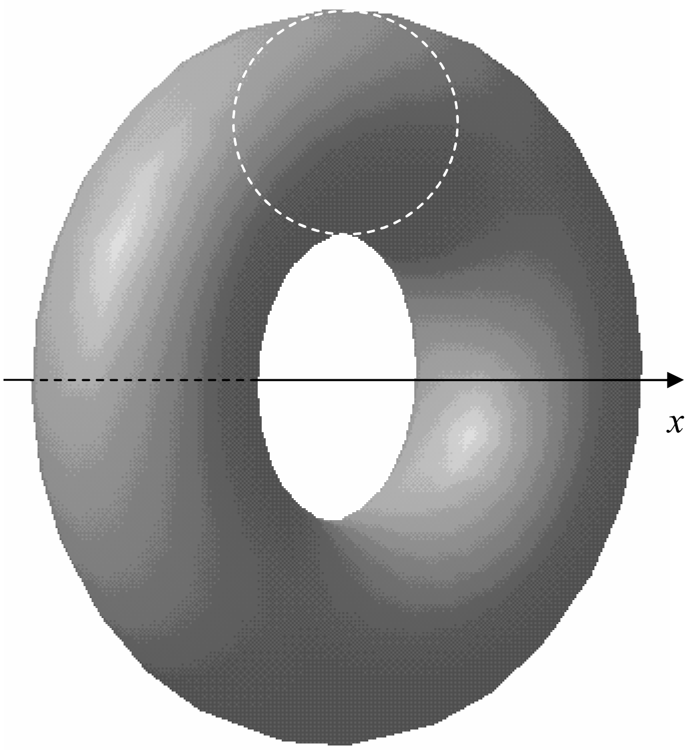
$$M_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y(t)\,dx(t) = a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 t\,dt = -a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,d\cos t =$$

$$= -a^2b\frac{\cos^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2b}{3}.$$

Оскільки $S = \frac{\pi ab}{4}$, то $x_C = \frac{M_y}{S} = \frac{4a}{3\pi}$, $y_C = \frac{M_x}{S} = \frac{4b}{3\pi}$.

9.5. Знайти площу поверхні тора, що утворюється обертанням навколо осі Ox кола $x^2 + (y-d)^2 = R^2$, $d > R$.

Розв'язання.



Скористаємось першою теоремою Гульдіна. Площа S поверхні тора, утвореного обертанням навколо осі Ox кола

$$x^2 + (y-d)^2 = R^2 \quad (d > R)$$

радіуса R, дорівнює добутку довжини кола (яка дорівнює $2\pi R$) на довжину шляху, що при цьому обертанні описує центр мас цього кола (і який дорівнює $2\pi d$), тобто

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi d = 4\pi^2 Rd.$$

9.6. Знайти об’єм тора, утвореного обертанням круга $x^2+(y-d)^2=R^2$ $(d>R)$ радіуса R навколо осі Ox.

Розв’язання.

Оскільки центр мас круга збігається з його геометричним центром, то за другою теоремою Гульдіна маємо

$$V=\pi R^2\cdot 2\pi d=2\pi^2R^2d.$$

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте основну властивість центра мас системи матеріальних точок.
2. Нехай на явно заданій дузі L: $y=f(x)$, $a\le x\le b$, задана змінна лінійна густина $\gamma=\gamma(x)$. Покажіть, що координати центра мас дуги виражаються формулами:

$$x_c=\frac{\int\limits_a^b x\cdot\gamma(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int\limits_a^b \gamma(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx},\quad y_c=\frac{\int\limits_a^b f(x)\cdot\gamma(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int\limits_a^b \gamma(x)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}.$$

3. Нехай однорідна матеріальна дуга задана параметрично

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}\quad \alpha\le t\le\beta,$$

Покажіть, що її центр мас можна знайти за формулами

$$x_c=\frac{\int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)\cdot\sqrt{(\varphi_t')^2+(\psi_t')^2}\,dt}{\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi_t')^2+(\psi_t')^2}\,dt},\quad y_c=\frac{\int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\cdot\sqrt{(\varphi_t')^2+(\psi_t')^2}\,dt}{\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi_t')^2+(\psi_t')^2}\,dt}.$$

4. Покажіть, що момент інерції явно заданої однорідної гладкої дуги графіка $y=f(x)$, $a\le x\le b$, обчислюється за формулою

$$I_0=\gamma\cdot\int\limits_a^b\left(x^2+f^2(x)\right)\cdot\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Завдання для роботи в аудиторії.

9.7. Знайти центр мас симетричного параболічного сегмента з основою, рівною a, і висотою h.

9.8. Знайти координати центра мас півкола $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

9.9. Знайти координати центра мас півкруга, обмеженого віссю абсцис та півколом $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.

9.10. Знайти координати центра мас фігури, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ і відрізком осі абсцис (від $x_1 = 0$ до $x_2 = \pi$).

9.11. Знайти координати центра мас першої арки циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

9.12. Знайти момент інерції дуги лінії $y = e^x$ $\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right)$ відносно осі абсцис.

9.13. Обчислити момент інерції однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$ відносно обох осей координат.

9.14. Знайти момент інерції прямокутника з сторонами a і b відносно сторони a .

9.15. Знайти момент інерції круга радіуса R відносно його центра.

9.16. Правильний шестикутник зі стороною a обертається навколо однієї із сторін. Знайти об'єм тіла, яке утворюється при цьому.

9.17. Еліпс з осями $A_1A_2 = 2a$ і $B_1B_2 = 2b$ обертається навколо прямої, паралельної осі A_1A_2 , що віддалена від неї на відстані $3b$. Знайти об'єм тіла, яке при цьому утворюється.

9.18. Астроїда обертається навколо прямої, що проходить через дві сусідніх вершини. Знайти об'єм і поверхню тіла, яке при цьому утворюється.

ЛІТЕРАТУРА

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
2. Бугров Я.С. Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – Т. 1. – М.: Наука, 1985. – 456 с.
4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. – Т. 1. – М.: Высшая школа, 1973. – 614 с.
5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач. – К.: А.С.К., 2001. – 480 с.
6. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 384 с.
7. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П.. Математический анализ в примерах и задачах. Введение в анализ, производная, интеграл. – Ч. 1. – К.: Вища школа, 1974. – 680 с.
8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Т. 1. – М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.
9. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты). – М.: Высшая школа, 1985. – 175 с.
10. Шкіль М.І., Колесник Т.В. Вища математика. – К.: Вища школа, 1986. – 512 с.
11. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. – М.: Наука, 1979. – 720 с.
12. Зорич В.А. Математический анализ. – Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 541 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА ... 3

§1. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум. Оцінка та порівняння визначених інтегралів ... 4

§2. Заміна змінної у визначеному інтегралі ... 11

§3. Інтегрування частинами визначених інтегралів ... 15

§4. Невласні інтеграли з нескінченними межами (1-го роду) ... 20

§5. Невласні інтеграли від розривних функцій (2-го роду) ... 26

§6. Обчислення площ фігур ... 32

§7. Обчислення довжини дуги ... 44

§8. Обчислення об'єму і поверхні тіла обертання ... 52

§9. Обчислення моментів, координат центра ваги, теореми Гульдіна ... 59

ЛІТЕРАТУРА ... 66

Навчальне видання

П Р А К Т И К У М
з інтегрального числення

Ч А С Т И Н А II
"Визначений інтеграл"

Дідковський Руслан Михайлович,
Сисоєнко Валентина Василівна,
Щерба Валентина Олександрівна

Надруковано з авторського оригіналу

Макет: Астапова І.І.

Підписано до друку 19.07.2006. Формат 60x84 1/16. Папір офс. Гарн. Times New Roman.
Друк оперативний. Ум. друк. арк. 3,95. Обл.-вид. арк. 3,7. Тираж 1000 прим. Зам. №248-06

Черкаський державний технологічний університет

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК № 896 від 16.04.2002 р.

Надруковано в редакційно-видавничому центрі ЧДТУ
бульвар Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006.